*Неклассические уравнения
математической физики
2007. С. 221–231*

УДК 517.9

ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ТРЕХ И ЧЕТЫРЕХ КОЭФФИЦИЕНТОВ МНОГОМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

С. В. Полынцева

Работа посвящена исследованию задач идентификации трех и четырех коэффициентов многомерного параболического уравнения с условиями переопределения, заданными соответственно на трех и четырех различных гиперплоскостях.

В данной работе исследована задача определения функции источника и коэффициентов при первой и второй производных многомерного параболического уравнения с условиями переопределения, заданными на трех различных гиперплоскостях и задача идентификации четырех коэффициентов многомерного параболического уравнения с условиями переопределения, заданными на четырех различных гиперплоскостях.

Задачу идентификации двух младших коэффициентов многомерного параболического уравнения с условиями переопределения, заданными на двух различных гиперплоскостях см. в [5]. Задачи идентификации трех старших и трех младших коэффициентов многомерных параболических уравнений с условиями переопределения, заданными на трех различных гиперплоскостях см. в работах [6, 7]. Задачи определения трех и четырех коэффициентов в случае неоднородных условий переопределения, заданных на одной и той же гиперплоскости см. в [1–3].

В полосе $G_{[0,T]} = \{(t,x,z) | \, 0 \le t \le T, \, x \in E_n, \, z \in E_1\}$ рассмотрим многомерное параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_x(u) + q_1(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + q_2(t,x)\frac{\partial u}{\partial z} + q_3(t,x)u + q_4(t,x)f(t,x,z) \tag{1}$$

с данными Коши

$$u(0,x,z) = u_0(x,z), \quad (x,z) \in E_{n+1}. \tag{2}$$

Здесь

$$L_x(u) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

функции $f(t,x,z)$, $u_0(x,z)$ заданы в $G_{[0,T]}$ и E_{n+1} соответственно, коэффициенты $\alpha_{ij}(t)$, $\alpha_i(t)$, $i,j = \overline{1,n}$, — непрерывные действительнозначные функции переменной t, $x \in E_n$, $0 \le t \le T$, $T > 0$ — постоянная, E_n — n-мерное евклидово

Работа поддержана грантом Сибирского федерального университета № 46 2007 г. в рамках реализации научно-методических проектов

пространство, $n \geq 1$. Считаем, что $\alpha_{ij}(t) = \alpha_{ji}(t)$ и выполняется соотношение

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(t)\xi_i\xi_j > 0 \quad \forall \xi \in E_n \backslash \{0\}, \ \ t \in [0, T].$$

Рассмотрим две задачи.

1. Задача определения функции источника и коэффициентов при первой и второй производных

Три коэффициента q_1, q_2, q_4 уравнения (1) неизвестны и определяются одновременно с функцией u при условии дополнительной информации, заданной на трех различных гиперплоскостях

$$u(t,x,0) = \varphi(t,x), \quad u(t,x,b) = \psi(t,x), \quad u(t,x,c) = \chi(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{[0,T]}, \quad (3)$$

где $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x)|\, 0 \leq t \leq T, x \in E_n\}$ и $\varphi(t,x)$, $\psi(t,x)$, $\chi(t,x)$ — заданные функции, удовлетворяющие условиям согласования

$$\varphi(0,x) = u_0(x,0), \quad \psi(0,x) = u_0(x,b), \quad \chi(0,x) = u_0(x,c), \qquad (4)$$

$x \in E_n$, $b \neq c$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ — постоянные. Коэффициент $q_3(t,x)$ является заданной непрерывной действительнозначной функцией в $\Pi_{[0,T]}$.

Ниже мы рассматриваем классические (достаточно гладкие) решения.

Под *решением* задачи (1)–(3) в полосе $G_{[0,t_*]}$, $0 < t_* \leq T$, понимается четверка функций u, q_1, q_2, q_4, удовлетворяющая соотношениям (1)–(3).

Предполагая, что решение $u(t,x,z)$ задачи (1)–(3) допускает прямое и обратное преобразование Фурье по переменной z, перейдем от задачи (1)–(3) к прямой вспомогательной задаче

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} =& L_x(v) - y^2\frac{S_\delta(B_1)}{S_\delta(\Delta_1)}v \\ &+ iy\frac{1}{S_\delta(\Delta_1)}\mathrm{Re}\Bigg\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v(t,x,y)\,dy\,(Q_2 f(t,x,b) - Q_1 f(t,x,c)) \\ &+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v(t,x,y)e^{iby}\,dy\,(Q_0 f(t,x,c) - Q_2 f(t,x,0)) \\ &+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v(t,x,y)e^{icy}\,dy\,(Q_1 f(t,x,0) - Q_0 f(t,x,b))\Bigg\}v \\ &+ q_3(t,x)v + \frac{\mathrm{Re}\,\{Q_2P_0 + Q_0P_2 + Q_1P_1\}}{S_\delta(\Delta_1)}F(t,x,y), \end{aligned} \qquad (5)$$

$$v(0,x,y) = v_0(x,y), \quad (x,y) \in E_{n+1}. \qquad (6)$$

Здесь $\Delta_1 = \mathrm{Re}\,\Delta$, $B_1 = \mathrm{Re}\,B$, $\mathrm{Re}\,\Psi$ — действительная часть Ψ,

$$\Delta = f(t,x,b)P_2 + f(t,x,c)P_0 + f(t,x,0)P_1 \neq 0$$

— определитель системы алгебраических уравнений, из которой определяются $q_1(t,x)$, $q_2(t,x)$, $q_4(t,x)$; $v_0(x,y)$, $F(t,x,y)$ — преобразование Фурье функций $u_0(x,z)$ и $f(t,x,z)$ соответственно,

$$Q_0 = \Phi - q_3(t,x)\varphi, \quad Q_1 = \Psi - q_3(t,x)\psi, \quad Q_2 = \Xi - q_3(t,x)\chi,$$

$$\Phi = \varphi_t - L_x(\varphi), \quad \Psi = \psi_t - L_x(\psi), \quad \Xi = \chi_t - L_x(\chi),$$

$$B = i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} yv(t,x,y)\,dy\,(Q_2 f(t,x,b) - Q_1 f(t,x,c)) + i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} yv(t,x,y)e^{iby}\,dy\,(Q_0 f(t,x,c) - Q_2 f(t,x,0)) + i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} yv(t,x,y)e^{icy}\,dy\,(Q_1 f(t,x,0) - Q_0 f(t,x,b)),$$

$$P_0 = i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} yv(t,x,y)\,dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v(t,x,y)e^{iby}\,dy - i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} yv(t,x,y)e^{iby}\,dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v(t,x,y)\,dy,$$

$$P_1 = i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} yv(t,x,y)e^{iby}\,dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v(t,x,y)e^{icy}\,dy - i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} yv(t,x,y)e^{icy}\,dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v(t,x,y)e^{iby}\,dy,$$

$$P_2 = i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} yv(t,x,y)e^{icy}\,dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v(t,x,y)\,dy - i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} yv(t,x,y)\,dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v(t,x,y)e^{icy}\,dy,$$

$S_\delta(\theta)$ — срезающая функция класса $C^4(E_1)$, $\delta > 0$, $\delta = \mathrm{const}$, удовлетворяющая следующим соотношениям

$$S_\delta(\theta) \geq \frac{\delta}{3} \text{ при } \theta \in E_1, \quad S_\delta(\theta) = \begin{cases} \theta, & \theta \geq \frac{\delta}{2}, \\ \frac{\delta}{3}, & \theta \leq \frac{\delta}{4}. \end{cases} \tag{7}$$

Сделаем предположение относительно входных данных.

Пусть функции $q_3(t,x)$, $\varphi(t,x)$, $\psi(t,x)$, $\chi(t,x)$, Φ, Ψ, Ξ, $F(t,x,y)$, $f|_{z=0}$, $f|_{z=b}$, $f|_{z=c}$, $v_0(x,y)$ — непрерывные по t, достаточно гладкие по переменным x, y в $G_{[0,T]}$ и удовлетворяют неравенствам

$$|D_x^\beta v_0| + |D_x^\beta F| + |D_x^\beta f|_{z=0}| + |D_x^\beta f|_{z=b}| + |D_x^\beta f|_{z=c}| + |D_x^\beta \Phi| + |D_x^\beta \Psi| + |D_x^\beta \Xi| + |D_x^\beta q_3| + |D_x^\beta \varphi| + |D_x^\beta \psi| + |D_x^\beta \chi| \leq N, \quad |\beta| \leq 4; \tag{8}$$

$$|\frac{\partial}{\partial y} D_x^\gamma v_0| + |\frac{\partial}{\partial y} D_x^\gamma F| \leq N, \ \ |\gamma| \leq 2; \tag{9}$$

$$|y|^{p+8-2|\beta|+\varepsilon} |D_x^\beta v_0| + |y|^{p+8-2|\beta|+\varepsilon} |D_x^\beta F| \leq M, \quad |\beta| \leq 4; \tag{10}$$

$$|y|^{p+4-2|\gamma|+\varepsilon}|\frac{\partial}{\partial y}D_x^{\gamma}v_0|+|y|^{p+4-2|\gamma|+\varepsilon}|\frac{\partial}{\partial y}D_x^{\gamma}F|\le R,\quad |\gamma|\le 2; \tag{11}$$

$(t,x,y)\in G_{[0,T]}$, $p\ge 4$ — целое, N, M, R — неотрицательные постоянные, $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)$, $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$ — мультииндексы, $|\beta|=\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i$, $D_x^{\beta}=\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1}\dots\partial x_n^{\beta_n}}$.

На основании предположения достаточной гладкости начальных данных методом слабой аппроксимации [4, 8] доказана

Теорема 1. *Пусть выполняются соотношения* (7), (8)–(11). *Тогда в классе* $C^{1,2}_{t,x}(G_{[0,t_*]})$ *существует решение* $v(t,x,y)$ *задачи* (5), (6), *удовлетворяющее неравенству*

$$|y|^q|D_x^{\alpha}v(t,x,y)|\le C,\quad (t,x,y)\in G_{[0,t_*]}, \tag{12}$$
$$q=0,\dots,p+4-2|\alpha|,p+4-2|\alpha|+\varepsilon,\quad |\alpha|\le 2.$$

Постоянная t_*, $0<t_*\le T$, *зависит от постоянных* N, M, R, δ *из соотношений* (7), (8)–(11).

Здесь и далее C — различные неотрицательные постоянные, $C^{l,m}_{t,x}(G_{[0,t_*]})$ — пространство функций f, имеющих непрерывные производные в $G_{[0,t_*]}$ по t до порядка l и по x до порядка m включительно.

Предположим выполненными условия

$$|\psi_t|+|\varphi_t|+|\chi_t|+|q_{3t}(t,x)|+|f_t|_{z=b}|+|f_t|_{z=c}|+|f_t|_{z=0}| \\ +|\Psi_t|+|\Phi_t|+|\Xi_t|\le C,\quad (t,x)\in\Pi_{[0,T]},$$

$$\begin{aligned}|\Delta(0,x)|=&\Bigg|f(0,x,b)\left(\frac{\partial u_0(x,0)}{\partial z}\frac{\partial^2u_0(x,c)}{\partial z^2}-\frac{\partial u_0(x,c)}{\partial z}\frac{\partial^2u_0(x,0)}{\partial z^2}\right)+\\ &+f(0,x,c)\left(\frac{\partial u_0(x,b)}{\partial z}\frac{\partial^2u_0(x,0)}{\partial z^2}-\frac{\partial u_0(x,0)}{\partial z}\frac{\partial^2u_0(x,b)}{\partial z^2}\right)+\\ &+f(0,x,0)\left(\frac{\partial u_0(x,c)}{\partial z}\frac{\partial^2u_0(x,b)}{\partial z^2}-\frac{\partial u_0(x,b)}{\partial z}\frac{\partial^2u_0(x,c)}{\partial z^2}\right)\Bigg|\ge\delta>0,\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}|B(0,x)|=&\Bigg|\frac{\partial u_0(x,0)}{\partial z}(Q_2(0)f(0,x,b)-Q_1(0)f(0,x,c))\\ &+\frac{\partial u_0(x,b)}{\partial z}(Q_0(0)f(0,x,c)-Q_2(0)f(0,x,0))\\ &+\frac{\partial u_0(x,c)}{\partial z}(Q_1(0)f(0,x,0)-Q_0(0)f(0,x,b))\Bigg|\ge\delta>0,\end{aligned}$$

где δ — константа,

$$Q_0(0)=\frac{\partial\varphi(0,x)}{\partial t}-L_x(u_0(x,0))-q_3(0,x)u_0(x,0),$$
$$Q_1(0)=\frac{\partial\psi(0,x)}{\partial t}-L_x(u_0(x,b))-q_3(0,x)u_0(x,b),$$
$$Q_2(0)=\frac{\partial\chi(0,x)}{\partial t}-L_x(u_0(x,c))-q_3(0,x)u_0(x,c).$$

Доказано, что при условиях (13) классическое решение $u(t,x,z)$, $q_1(t,x)$, $q_2(t,x)$, $q_4(t,x)$ задачи (1)–(3) задается соотношениями

$$u(t,x,z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}v(t,x,y)e^{izy}\,dy, \tag{14}$$

$$q_1(t,x) = \frac{B}{\Delta}, \tag{15}$$

$$\begin{aligned} q_2(t,x) = & \frac{1}{\Delta}\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v(t,x,y)\,dy (Q_2 f(t,x,b) - Q_1 f(t,x,c)) \\ & + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v(t,x,y) e^{iby}\,dy (Q_0 f(t,x,c) - Q_2 f(t,x,0)) \\ & + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v(t,x,y) e^{icy}\,dy (Q_1 f(t,x,0) - Q_0 f(t,x,b)) \Bigg), \end{aligned} \tag{16}$$

$$q_4(t,x) = \frac{Q_2 P_0 + Q_0 P_1 + Q_1 P_2}{\Delta}, \tag{17}$$

где $v(t,x,y)$ является решением задачи (5), (6).

В силу(12) из (14)–(17) следует, что четверка действительнозначных функций u, q_1, q_2, q_4 принадлежит классу

$$\begin{aligned} U(t_*) = \{ & \lambda(t,x,z),\, \mu(t,x),\, \mu_1(t,x)\, \mu_2(t,x) \mid \frac{\partial^k \lambda}{\partial z^k} \in C^{0,2}_{t,x}(G_{[0,t_*]}), \\ & k = 0, \cdots, p,\ \ p \geq 4,\ \ \lambda_t \in C(G_{[0,t_*]}),\ \ \mu, \mu_1, \mu_2 \in C^{0,2}_{t,x}(\Pi_{[0,t_*]}) \} \end{aligned}$$

и имеют место неравенства

$$\sum_{k=0}^{p} \sum_{|\alpha| \leq 2} \left| \frac{\partial^k}{\partial z^k} D^\alpha_x u(t,x,z) \right| \leq C, \quad (t,x,z) \in G_{[0,t_*]}, \tag{18}$$

$$\sum_{|\alpha| \leq 2} |D^\alpha_x q_1(t,x)| + \sum_{|\alpha| \leq 2} |D^\alpha_x q_2(t,x)| + \sum_{|\alpha| \leq 2} |D^\alpha_x q_4(t,x)| \leq C, \quad (t,x) \in \Pi_{[0,t_*]}. \tag{19}$$

Имеет место

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (4), (8)–(11), (13). *Тогда в классе* $U(t^*)$ *существует единственное решение* u, q_1, q_2, q_4 *задачи* (1)–(3), *удовлетворяющее соотношениям* (18), (19). *Постоянная* t^*, $0 < t^* \leq T$, *зависит от постоянных* M, C, N, R, δ *из соотношений* (4), (8)–(11), (13).

2. Задача идентификации четырех коэффициентов

Коэффициенты q_i, $i = 1,2,3,4$ уравнения (1) неизвестны и определяются одновременно с функцией u при условии дополнительной информации (3) и условия

$$u(t,x,d) = \chi_1(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{[0,T]}, \tag{20}$$

где $\chi_1(t,x)$ – заданная функция, удовлетворяющая условию согласования

$$\chi(0,x) = u_0(x,d),\ \ x \in E_n,\ \ \text{постоянные } 0,\ b,\ c,\ d \text{ попарно различные.} \tag{21}$$

Под решением задачи (1)–(3), (20) в полосе $G_{[0,t_*]}$, $0 < t_* \leq T$, понимается пятерка функций u, q_1, q_2, q_3, q_4, удовлетворяющая соотношениям (1)–(3), (20).

Предполагая существование преобразования Фурье функции $u(t,x,z)$ по переменной z, перейдем от задачи (1)–(3), (20) к вспомогательной прямой задаче

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} =& L_x(v) - y^2\frac{S_\delta(B_1)}{S_\delta(\Delta_1)}v + iy\frac{1}{S_\delta(\Delta_1)}Re\{f(t,x,0)(\Xi Q_{11} - \Psi Q_{10}\\ &- \Xi_1 Q_9) + f(t,x,b)(\Phi Q_{10} - \Xi Q_8 + \Xi_1 Q_7) + f(t,x,c)(\Psi Q_8 - \Phi Q_{11}\\ &- \Xi_1 Q_6) + f(t,x,d)(\Phi Q_9 - \Psi Q_7 + \Xi Q_6)\}v + \frac{1}{S_\delta(\Delta_1)}Re\{f(t,x,0)\\ &\times(\Xi P_4 - \Psi P_5 - \Xi_1 P_1) + f(t,x,b)(\Phi P_5 - \Xi P_3 + \Xi_1 P_2)\\ &+ f(t,x,c)(\Psi P_3 - \Phi P_4 - \Xi_1 P_0) + f(t,x,d)(\Phi P_1 - \Psi P_2 + \Xi P_0)\}v\\ &+ \frac{1}{S_\delta(\Delta_1)}Re\{\Psi(\varphi P_5 - \chi P_3 + \chi_1 P_2) + \Phi(\chi P_4 - \psi P_5 - \chi_1 P_1)\\ &+ \Xi(\psi P_3 - \varphi P_4 - \chi_1 P_0) + \Xi_1(\varphi P_1 - \psi P_2 + \chi P_0)\}F(t,x,y), \qquad (22)\end{aligned}$$

$$v(0,x,y) = v_0(x,y), \quad (x,y) \in E_{n+1}, \qquad (23)$$

где $S_\delta(\theta)$ — срезающая функция (см.(7)), $\Delta_1 = Re\Delta$, $B_1 = ReB$, $\Phi = \varphi_t - L_x(\varphi)$,

$$\Psi = \psi_t - L_x(\psi),\ \ \Xi = \chi_t - L_x(\chi),\ \ \Xi_1 = \chi_{1t} - L_x(\chi_1),$$

$$\begin{aligned}\Delta = &f(t,x,0)(\chi P_4 - \psi P_5 - \chi_1 P_1) + f(t,x,b)(\varphi P_5 - \chi P_3 + \chi_1 P_2)\\ &+ f(t,x,c)(\psi P_3 - \varphi P_4 - \chi_1 P_0) + f(t,x,d)(\varphi P_1 - \psi P_2 + \chi P_0) \neq 0\end{aligned}$$

— определитель системы алгебраических уравнений, из которой определяются q_1, q_2, q_3, q_4,

$$\begin{aligned}B = &f(t,x,0)(\Xi Q_5 - \Psi Q_4 - \Xi_1 Q_3) + f(t,x,b)(\Phi Q_4 - \Xi Q_2 + \Xi_1 Q_1)\\ &+ f(t,x,c)(\Psi Q_2 - \Phi Q_5 - \Xi_1 Q_0) + f(t,x,d)(\Phi Q_3 - \Psi Q_1 + \Xi Q_0),\end{aligned}$$

$$Q_0 = \psi i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} yv(t,x,y)\,dy - \varphi i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} yv(t,x,y)e^{iby}\,dy,$$

$$Q_1 = \chi i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} yv(t,x,y)\,dy - \varphi i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} yv(t,x,y)e^{icy}\,dy,$$

$$Q_2 = \chi_1 i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} yv(t,x,y)\,dy - \varphi i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} yv(t,x,y)e^{idy}\,dy,$$

$$Q_3 = \chi i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} yv(t,x,y)e^{iby}\,dy - \psi i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} yv(t,x,y)e^{icy}\,dy,$$

$$Q_4 = \chi_1 i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} yv(t,x,y)e^{icy}\,dy - \chi i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} yv(t,x,y)e^{idy}\,dy,$$

$$Q_5 = \chi_1 i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} yv(t,x,y)e^{iby}\,dy - \psi i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} yv(t,x,y)e^{idy}\,dy,$$

$$Q_6 = \psi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v(t,x,y)\,dy - \varphi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v(t,x,y) e^{iby}\,dy,$$

$$Q_7 = \chi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v(t,x,y)\,dy - \varphi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v(t,x,y) e^{icy}\,dy,$$

$$Q_8 = \chi_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v(t,x,y)\,dy - \varphi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v(t,x,y) e^{idy}\,dy,$$

$$Q_9 = \chi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v(t,x,y) e^{iby}\,dy - \psi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v(t,x,y) e^{icy}\,dy,$$

$$Q_{10} = \chi_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v(t,x,y) e^{icy}\,dy - \chi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v(t,x,y) e^{idy}\,dy,$$

$$Q_{11} = \chi_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v(t,x,y) e^{iby}\,dy - \psi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v(t,x,y) e^{idy}\,dy,$$

$$P_0 = i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y v(t,x,y)\,dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v(t,x,y) e^{iby}\,dy - i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y v(t,x,y) e^{iby}\,dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v(t,x,y)\,dy,$$

$$P_1 = i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y v(t,x,y) e^{iby}\,dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v(t,x,y) e^{icy}\,dy - i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y v(t,x,y) e^{icy}\,dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v(t,x,y) e^{iby}\,dy,$$

$$P_2 = i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y v(t,x,y)\,dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v(t,x,y) e^{icy}\,dy - i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y v(t,x,y) e^{icy}\,dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v(t,x,y)\,dy,$$

$$P_3 = i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y v(t,x,y)\,dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v(t,x,y) e^{idy}\,dy - i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y v(t,x,y) e^{idy}\,dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v(t,x,y)\,dy,$$

$$P_4 = i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} yv(t,x,y)e^{iby}\,dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v(t,x,y)e^{idy}\,dy \\ - i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} yv(t,x,y)e^{idy}\,dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v(t,x,y)e^{iby}\,dy,$$

$$P_5 = i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} yv(t,x,y)e^{icy}\,dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v(t,x,y)e^{idy}\,dy \\ - i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} yv(t,x,y)e^{idy}\,dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v(t,x,y)e^{icy}\,dy.$$

Сделаем предположение относительно входных данных.

Пусть функции $\varphi(t,x)$, $\psi(t,x)$, $\chi(t,x)$, $\chi_1(t,x)$, Φ, Ψ, Ξ, Ξ_1, $F(t,x,y)$, $f|_{z=0}$, $f|_{z=b}$, $f|_{z=c}$, $f|_{z=d}$, $v_0(x,y)$ — непрерывные по t, достаточно гладкие по переменным x, y в $G_{[0,T]}$ и удовлетворяют неравенствам (9)–(11) и

$$|D_x^\beta v_0| + |D_x^\beta F| + |D_x^\beta f|_{z=0}| + |D_x^\beta f|_{z=b}| + |D_x^\beta f|_{z=c}| + |D_x^\beta f|_{z=d}| + |D_x^\beta \Phi| \\ + |D_x^\beta \Psi| + |D_x^\beta \Xi| + |D_x^\beta \Xi_1| + |D_x^\beta \varphi| + |D_x^\beta \psi| + |D_x^\beta \chi| + |D_x^\beta \chi_1| \le C, \quad |\beta| \le 4; \tag{24}$$

$(t,x,y) \in G_{[0,T]}$, $p \ge 4$ — целое.

На основании предположения достаточной гладкости начальных данных методом слабой аппроксимации доказана

Теорема 3. *Пусть выполняются соотношения* (7), (9)–(11), (24). *Тогда в классе* $C^{1,2}_{t,x}(G_{[0,t_*]})$ *существует решение* $v(t,x,y)$ *задачи* (22), (23), *удовлетворяющее неравенству* (12). *Постоянная* t_*, $0 < t_* \le T$, *зависит от постоянных* C, M, R, N, δ *из соотношений* (7), (9)–(11), (24).

Предположим выполнение условий

$$|\psi_t| + |\varphi_t| + |\chi_t| + |\chi_{1t}| + |f_t|_{z=0}| + |f_t|_{z=b}| + |f_t|_{z=c}| + |f_t|_{z=d}| \\ + |\Psi_t| + |\Phi_t| + |\Xi_t| + |\Xi_{1t}| \le C, \quad (t,x) \in \Pi_{[0,T]},$$

$$\begin{aligned} |\Delta(0,x)| = &|f(0,x,0)(u_0(x,c)P_4(0) - u_0(x,b)P_5(0) - u_0(x,d)P_1(0)) \\ &+ f(0,x,b)(u_0(x,0)P_5(0) - u_0(x,c)P_3(0) + u_0(x,d)P_2(0)) \\ &+ f(0,x,c)(u_0(x,b)P_3(0) - u_0(x,0)P_4(0) - u_0(x,d)P_0(0)) \\ &+ f(0,x,d)(u_0(x,0)P_1(0) - u_0(x,b)P_2(0) + u_0(x,c)P_0(0))| \ge \delta > 0, \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} |B(0,x)| = &|f(0,x,0)(\Xi(0)Q_5(0) - \Psi(0)Q_4(0) - \Xi_1(0)Q_3(0)) \\ &+ f(0,x,b)(\Phi(0)Q_4(0) - \Xi(0)Q_2(0) + \Xi_1(0)Q_1(0)) \\ &+ f(0,x,c)(\Psi(0)Q_2(0) - \Phi(0)Q_5(0) - \Xi_1(0)Q_0(0)) \\ &+ f(0,x,d)(\Phi(0)Q_3(0) - \Psi(0)Q_1(0) + \Xi(0)Q_0(0))| \ge \delta > 0, \end{aligned}$$

где δ — константа,

$$\Phi(0) = \frac{\partial \varphi(0,x)}{\partial t} - L_x(u_0(x,0)), \quad \Psi(0) = \frac{\partial \psi(0,x)}{\partial t} - L_x(u_0(x,b)),$$

$$\Xi(0) = \frac{\partial \chi(0,x)}{\partial t} - L_x(u_0(x,c)), \quad \Xi_1(0) = \frac{\partial \chi_1(0,x)}{\partial t} - L_x(u_0(x,d)),$$

$$Q_0(0) = u_0(x,b)\frac{\partial u_0(x,0)}{\partial z} - u_0(x,0)\frac{\partial u_0(x,b)}{\partial z},$$

$$Q_1(0) = u_0(x,c)\frac{\partial u_0(x,0)}{\partial z} - u_0(x,0)\frac{\partial u_0(x,c)}{\partial z},$$

$$Q_2(0) = u_0(x,d)\frac{\partial u_0(x,0)}{\partial z} - u_0(x,0)\frac{\partial u_0(x,d)}{\partial z},$$

$$Q_3(0) = u_0(x,c)\frac{\partial u_0(x,b)}{\partial z} - u_0(x,b)\frac{\partial u_0(x,c)}{\partial z},$$

$$Q_4(0) = u_0(x,d)\frac{\partial u_0(x,c)}{\partial z} - u_0(x,c)\frac{\partial u_0(x,d)}{\partial z},$$

$$Q_5(0) = u_0(x,d)\frac{\partial u_0(x,b)}{\partial z} - u_0(x,b)\frac{\partial u_0(x,d)}{\partial z},$$

$$Q_6(0) = -u_0(x,b)\frac{\partial^2 u_0(x,0)}{\partial z^2} + u_0(x,0)\frac{\partial^2 u_0(x,b)}{\partial z^2},$$

$$Q_7(0) = -u_0(x,c)\frac{\partial^2 u_0(x,0)}{\partial z^2} + u_0(x,0)\frac{\partial^2 u_0(x,c)}{\partial z^2},$$

$$Q_8(0) = -u_0(x,d)\frac{\partial^2 u_0(x,0)}{\partial z^2} + u_0(x,0)\frac{\partial^2 u_0(x,d)}{\partial z^2},$$

$$Q_9(0) = -u_0(x,c)\frac{\partial^2 u_0(x,b)}{\partial z^2} + u_0(x,b)\frac{\partial^2 u_0(x,c)}{\partial z^2},$$

$$Q_{10}(0) = -u_0(x,d)\frac{\partial^2 u_0(x,c)}{\partial z^2} + u_0(x,c)\frac{\partial^2 u_0(x,d)}{\partial z^2},$$

$$Q_{11}(0) = -u_0(x,d)\frac{\partial^2 u_0(x,b)}{\partial z^2} + u_0(x,b)\frac{\partial^2 u_0(x,d)}{\partial z^2},$$

$$P_0(0) = -\frac{\partial u_0(x,0)}{\partial z}\frac{\partial^2 u_0(x,b)}{\partial z^2} + \frac{\partial u_0(x,b)}{\partial z}\frac{\partial^2 u_0(x,0)}{\partial z^2},$$

$$P_1(0) = -\frac{\partial u_0(x,b)}{\partial z}\frac{\partial^2 u_0(x,c)}{\partial z^2} + \frac{\partial u_0(x,c)}{\partial z}\frac{\partial^2 u_0(x,b)}{\partial z^2},$$

$$P_2(0) = -\frac{\partial u_0(x,0)}{\partial z}\frac{\partial^2 u_0(x,c)}{\partial z^2} + \frac{\partial u_0(x,c)}{\partial z}\frac{\partial^2 u_0(x,0)}{\partial z^2},$$

$$P_3(0) = -\frac{\partial u_0(x,0)}{\partial z}\frac{\partial^2 u_0(x,d)}{\partial z^2} + \frac{\partial u_0(x,d)}{\partial z}\frac{\partial^2 u_0(x,0)}{\partial z^2},$$

$$P_4(0) = -\frac{\partial u_0(x,b)}{\partial z}\frac{\partial^2 u_0(x,d)}{\partial z^2} + \frac{\partial u_0(x,d)}{\partial z}\frac{\partial^2 u_0(x,b)}{\partial z^2},$$

$$P_5(0) = -\frac{\partial u_0(x,c)}{\partial z}\frac{\partial^2 u_0(x,d)}{\partial z^2} + \frac{\partial u_0(x,d)}{\partial z}\frac{\partial^2 u_0(x,c)}{\partial z^2}.$$

Доказано, что при условиях (25) классическое решение u, q_1, q_2, q_3, q_4 задачи (1)–(3), (20) задается соотношениями

$$u(t,x,z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} v(t,x,y)e^{izy}\,dy, \quad q_1(t,x) = \frac{B}{\Delta}, \tag{26}$$

$$
\begin{aligned}
q_2(t,x) =& \frac{1}{\Delta}\{f(t,x,0)(\Xi Q_{11} - \Psi Q_{10} - \Xi_1 Q_9) \\
&+ f(t,x,b)(\Phi Q_{10} - \Xi Q_8 + \Xi_1 Q_7) + f(t,x,c)(\Psi Q_8 - \Phi Q_{11} \\
&- \Xi_1 Q_6) + f(t,x,d)(\Phi Q_9 - \Psi Q_7 + \Xi Q_6)\},
\end{aligned} \tag{27}
$$

$$
\begin{aligned}
q_3(t,x) =& \frac{1}{\Delta}\{f(t,x,0)(\Xi P_4 - \Psi P_5 - \Xi_1 P_1) \\
&+ f(t,x,b)(\Phi P_5 - \Xi P_3 + \Xi_1 P_2) + f(t,x,c)(\Psi P_3 - \Phi P_4 \\
&- \Xi_1 P_0) + f(t,x,d)(\Phi P_1 - \Psi P_2 + \Xi P_0)\},
\end{aligned} \tag{28}
$$

$$
\begin{aligned}
q_4(t,x) =& \frac{1}{\Delta}\{\Psi(\varphi P_5 - \chi P_3 + \chi_1 P_2) + \Phi(\chi P_4 - \psi P_5 - \chi_1 P_1) \\
&+ \Xi(\psi P_3 - \varphi P_4 - \chi_1 P_0) + \Xi_1(\varphi P_1 - \psi P_2 + \chi P_0)\},
\end{aligned} \tag{29}
$$

где $v(t,x,y)$ является решением задачи (22), (23).

Согласно (12) из представлений (26)–(29) следует, что пятерка функций u, q_1, q_2, q_3, q_4 принадлежит классу

$$
\begin{aligned}
U(t_*) = \{&\lambda(t,x,z),\, \mu(t,x),\, \mu_1(t,x)\,\mu_2(t,x)\,\mu_3(t,x) \mid \frac{\partial^k \lambda}{\partial z^k} \in C^{0,2}_{t,x}(G_{[0,t_*]}), \\
&k = 0,\cdots,p,\ \ p \geq 4,\ \ \lambda_t \in C(G_{[0,t_*]}),\ \mu,\mu_1,\mu_2,\mu_3 \in C^{0,2}_{t,x}(\Pi_{[0,t_*]})\}
\end{aligned}
$$

и выполняются неравенства (18),

$$
\begin{aligned}
&\sum_{|\alpha|\leq 2} |D^\alpha_x q_1(t,x)| + \sum_{|\alpha|\leq 2} |D^\alpha_x q_2(t,x)| + \sum_{|\alpha|\leq 2} |D^\alpha_x q_3(t,x)| \\
&\qquad + \sum_{|\alpha|\leq 2} |D^\alpha_x q_4(t,x)| \leq C, \quad (t,x) \in \Pi_{[0,t_*]}.
\end{aligned} \tag{30}
$$

Имеет место

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* (4), (9)–(11), (21), (24), (25). *Тогда в классе* $U(t^*)$ *существует единственное решение* u, q_1, q_2, q_3, q_4 *задачи* (1)–(3), (20), *удовлетворяющее соотношениям* (18), (30). *Постоянная* t^*, $0 < t^* \leq T$, *зависит от постоянных* C, N, M, R, δ *из соотношений* (9)–(11), (24), (25).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баранов С. Н.* О задаче идентификации четырех коэффициентов многомерного параболического уравнения в случае неоднородных условий переопределения // Вестн. КрасГУ. Сер. физ.-мат. науки. Красноярск: КрасГУ, 2005. Вып. 1. С. 149–159.
2. *Баранов С. Н., Белов Ю. Я.* О задаче идентификации нескольких коэффициентов с неоднородными условиями переопределения // Дальневосточный мат. журн. Владивосток, 2004. Т. 5, № 1. С. 30–40.
3. *Баранов С. Н., Белов Ю. Я.* О задаче идентификации трех коэффициентов с неоднородными условиями переопределения // Вычисл. технологии. Новосибирск, 2003. Т. 8, ч. 4. С. 92-102.
4. *Белов Ю. Я., Кантор С. А.* Метод слабой аппроксимации. Красноярск: Краснояр. гос. ун-т, 1999. 236 с.
5. *Белов Ю. Я., Полынцева С. В.* Об одной задаче идентификации двух коэффициентов многомерного параболического уравнения // Докл. РАН. 2004. Т. 396, № 5. С. 583–586.

6. *Белов Ю. Я., Полынцева С. В.* О задаче идентификации трех коэффициентов многомерного параболического уравнения // Совместный выпуск, часть I. Вычисл. технологии. Т. 9. Вестник КазНУ, № 3(42). Алматы – Новосибирск, 2004. С. 273–280.

7. *Полынцева С. В.* О задачах идентификации трех коэффициентов многомерного параболического уравнения // Материалы конференции “Информационные технологии и обратные задачи рационального природопользования”. Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2005. С. 52–57.

8. *Яненко Н. Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск, 1967. 195 с.

Полынцева Светлана Владимировна
Россия, Красноярск, Сибирский федеральный университет
siriuspsv@mail.ru