Неклассические уравнения математической физики
2007. С. 232–236

УДК 517.95

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ДВУМЯ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Л. С. Пулькина

Работа посвящена исследованию разрешимости нелокальной задачи с интегральными условиями для уравнения $u_{tt} - u_{xx} + c(x,t)u = f(x,t)$. Найдены условия, при которых существует ее единственное решение.

В предлагаемой работе рассматривается задача для одномерного по пространственным переменным гиперболического уравнения с нелокальными интегральными условиями. Нелокальными принято называть такие условия, которые задают некоторую связь между значениями искомого решения в различных точках границы, либо в точках границы и внутренних точках, либо только во внутренних точках области. Последний из приведенных здесь возможных вариантов задания нелокальных условий приводит к возникновению значительных трудностей при исследовании разрешимости нелокальной задачи именно из-за отсутствия какой-либо информации об искомом решении на границе области. Однако в случае одной пространственной переменной эту трудность можно преодолеть. Задача с нелокальными условиями такого вида была рассмотрена в [3], где доказана ее обобщенная разрешимость в том случае, когда заданные функции, входящие в интегральные условия, зависят только от пространственной переменной. Здесь же рассмотрен вопрос о существовании решения, имеющего все производные, входящие в уравнение, а ядра интегральных условий суть функции как пространственной, так и временной переменных.

Задача 1. Найти в области $Q_T = \{(x,t): \ 0 < x < l, \ 0 < t < T\}$ решение уравнения

$$\mathcal{L}u \equiv u_{tt} - u_{xx} + c(x,t)u = f(x,t), \tag{1}$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \tag{2}$$

$$\int\limits_0^l K_i(x,t)u(x,t)dx + \int\limits_0^t \int\limits_0^l N_i(x,\tau)u(x,\tau)dxd\tau$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^\tau \int\limits_0^l M_i(x,\eta)u(x,\eta)dxd\eta d\tau = s_i(t), \quad i = 1,2. \tag{3}$$

Функции $c(x,t)$, $f(x,t)$, $K_i(x,t)$, $N_i(x,t)$, $M_i(x,t)$ заданы в $\bar{Q}_T$, функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $s_i(t)$ заданы на $[0,l]$ и $[0,T]$ соответственно.

Основным результатом статьи является доказательство существования решения поставленной задачи.

Пусть выполняются следующие условия:

$$c(x,t) \in C^1(\overline{Q}_T), \tag{4}$$

$$\frac{\partial^3 K_i}{\partial t^3}, \quad \frac{\partial^2 N_i}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^3 K_i}{\partial x \partial t^2}, \quad \frac{\partial M_i}{\partial t} \in C(\overline{Q}_T), \tag{5}$$

$$\Delta(t) \equiv K_1(0,t)K_2(l,t) - K_1(l,t)K_2(0,t) \neq 0, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{6}$$

Доказательство разрешимости задачи 1 проведем в несколько этапов:

на первом этапе сведем задачу 1 к эквивалентной ей задаче 2 с нелокальными условиями другого вида;

на втором — докажем разрешимость задачи 2, для чего рассмотрим вспомогательную задачу;

на третьем — покажем, что при специальном выборе граничных условий вспомогательной задачи ее решение будет решением задачи 2, и, стало быть, решением поставленной задачи 1.

Пусть $u(x,t) \in W_2^2(Q_T)$ и является решением задачи 1. Дифференцируя каждое из условий (3) дважды по t, получим

$$\int_0^l K_i(x,t)u_{tt}(x,t)dx + \int_0^l [2K_{it}(x,t) + N_i(x,t)]u_t(x,t)dx \\ + \int_0^l [K_{itt}(x,t) + N_{it}(x,t) + M_i(x,t)]u(x,t)dx = s_i''(t).$$

Так как $u(x,t)$ по нашему предположению удовлетворяет уравнению (1), то под знаком первого интеграла $u_{tt} = u_{xx} - cu + f$. После интегрирования по частям, получим

$$K_i(l,t)u_x(l,t) - K_i(0,t)u_x(0,t) \\ = \int_0^l K_{ix}(x,t)u_x(x,t)dx - \int_0^l (2K_{it}(x,t) + N_i(x,t))u_t(x,t)dx \\ - \int_0^l (K_{itt}(x,t) + N_{it}(x,t) + M_i(x,t) - K_i(x,t)c(x,t))u(x,t)dx \\ + s_i''(t) - \int_0^l K_i(x,t)f(x,t)dx, \quad i = 1,2.$$

В силу условия $\Delta(t) \equiv K_1(0,t)K_2(l,t) - K_1(l,t)K_2(0,t) \neq 0$ полученную систему можно разрешить относительно $u_x(l,t)$ и $u_x(0,t)$:

$$\begin{aligned} u_x(0,t) &= \int_0^l P_1 u_x dx + \int_0^l P_2 u_t dx + \int_0^l P_3 u dx + g_1(t), \\ u_x(l,t) &= \int_0^l H_1 u_x dx + \int_0^l H_2 u_t dx + \int_0^l H_3 u dx + g_2(t), \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$P_1(x,t)=\frac{1}{\Delta(t)}(K_{1x}(x,t)K_2(l,t)-K_{2x}(x,t)K_1(l,t)),$$

$$P_2(x,t)=\frac{(2K_{2t}(x,t)+N_2(x,t))K_1(l,t)-(2K_{1t}(x,t)+N_1(x,t))K_2(l,t)}{\Delta(t)},$$

$$P_3(x,t)=\frac{(K_{2tt}+N_{2t}+M_2-cK_2)K_1(l,t)-(K_{1tt}+N_{1t}+M_1-cK_1)K_2(l,t)}{\Delta(t)},$$

$$H_1(x,t)=\frac{1}{\Delta(t)}(K_{1x}(x,t)K_2(0,t)-K_{2x}(x,t)K_1(0,t)),$$

$$H_2(x,t)=\frac{(2K_{2t}(x,t)+N_2(x,t))K_1(0,t)-(2K_{1t}(x,t)+N_1(x,t))K_2(0,t)}{\Delta(t)},$$

$$H_3(x,t)=\frac{(K_{2tt}+N_{2t}+M_2-cK_2)K_1(0,t)-(K_{1tt}+N_{1t}+M_1-cK_1)K_2(0,t)}{\Delta(t)},$$

$$g_i(t)=s_i''(t)-\int\limits_0^l f(x,t)K_i(x,t)dx,\quad i=1,2.$$

Заметим, что теперь нелокальные условия связывают значения искомого решения и его производных во внутренних точках области и на границе.

Нетрудно видеть, что условия (7) эквивалентны условиям (3), если выполняются условия согласования

$$\int\limits_0^l K_i(x,0)\varphi(x)dx=s_i(0),\quad i=1,2, \tag{8}$$

$$\int\limits_0^l [K_{it}(x,0)\varphi(x)+K_i(x,0)\psi(x)]dx+\int\limits_0^l N_i(x,0)\varphi(x)dx=s_i'(0),\ i=1,2. \tag{9}$$

Таким образом, решив задачу с нелокальным условием (7), которую и будем называть задачей 2, мы тем самым решим поставленную задачу.

Задача 2. Найти в прямоугольнике Q_T решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2) и (7).

Введем следующие обозначения:

$$p_i^2=\max_{[0,T]}\int\limits_0^l P_i^2(x,t)dx,\quad h_i^2=\max_{[0,T]}\int\limits_0^l H_i^2(x,t)dx,\ i=1,2,3,$$

$$p=\max\{p_1,p_2,p_3\},\quad h=\max\{h_1,h_2,h_3\},$$

$$c_0=\min_{Q_T}c(x,t),\ c=\max_{Q_T}c(x,t),\ c_1=\max_{Q_T}|c_t(x,t)|,$$

$$m=\min\{c_0,1\},\ M=\max\{c_1,1\},$$

$$R=\max\{p,h\},\ k=e^{MT/m},\ L=\sqrt{3k}cl.$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (4), (5), (6), *а также*

$$c(x,t)\geq 0, f(x,t)\in L_2(Q_T),\quad f_t(x,t)\in L_2(Q_T),\ s_i(t)\in C^3[0,T], \tag{10}$$

$$f(x,0)=0,\quad s_i''(0)=0, \tag{11}$$

$$\varphi(x)\in W_2^2(0,l)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l),\ \psi(x)\in W_2^1(0,l). \tag{12}$$

Тогда, если $RL<1$, то существует единственное решение задачи 2 для п. в. $(x,t)\in Q_T$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную задачу: найти в прямоугольнике Q_T решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2) и граничным условиям

$$u_x(0,t)=\nu_1(t),\quad u_x(l,t)=\nu_2(t). \tag{13}$$

Известно [1], что при выполнении условий теоремы 1 эта задача имеет единственное решение $u(x,t)$ для п. в.$(x,t)\in Q_T$. Покажем, что если $\nu_i(t)\in \underline{W}_2^1(0,T)=\{\nu(t):\ \nu(t)\in W_2^1(0,T),\ \nu(t)\equiv 0, t\le 0\}$ (см. [2]), то справедлива оценка

$$||u||_{W_2^1}\le L(||\nu_1||_{L_2(0,T)}+||\nu_2||_{L_2(0,T)}+||\varphi||_{W_2^1}+||\psi||_{L_2}+||f||_{L_2(Q_T)}). \tag{14}$$

Введем новую неизвестную функцию $v(x,t)$, положив $v(x,t)=u(x,t)+w(x,t)$, где

$$w(x,t)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int\limits_0^{x-t-2kl}\nu_1(\xi)d\xi+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\int\limits_0^{t+x-2kl}\nu_1(\xi)d\xi-$$

$$-\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\int\limits_0^{t+x+l-2kl}\nu_2(\xi)d\xi-\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\int\limits_0^{t-x+l-2kl}\nu_2(\xi)d\xi. \tag{15}$$

Тогда функция $v(x,t)$ удовлетворяет в Q_T уравнению

$$v_{tt}-v_{xx}+c(x,t)v=F(x,t), \tag{16}$$

где $F(x,t)=f(x,t)-c(x,t)w(x,t)$, и условиям

$$v_x(0,t)=0,\quad v_x(l,t)=0,\quad v(x,0)=\varphi(x),\quad v_t(x,0)=\psi(x). \tag{17}$$

Теперь легко видно, что оценка (14) следует из известной оценки решения смешанной задачи относительно функции $v(x,t)$ [1] и представления функций $F(x,t)$, $w(x,t)$ и $u(x,t)=v(x,t)-w(x,t)$.

Покажем теперь, что функции $\nu_i(t)$ могут быть найдены так, что выполняются условия (7).

Рассмотрим условия (7) как систему операторных уравнений относительно неизвестных функций $\nu_i(t)$, считая функцию $u(x,t)$ решением вспомогательной задачи. Обозначим

$$Pu=\int\limits_0^l(P_1u_x+P_2u_t+P_3u)dx, \tag{18}$$

$$Hu=\int\limits_0^l(H_1u_x+H_2u_t+H_3u)dx. \tag{19}$$

В силу условий теоремы и оценки (14) операторы $Pu+g_1(t),\ Hu+g_2(t)$ переводят функции $\nu_i(t)\in L_2$ в функции из того же пространства. Нетрудно получить неравенства

$$||Pu||_{L_2(0,T)}\le p||u||_{W_2^1(Q_T)},$$

$$||Hu||_{L_2(0,T)} \leq h||u||_{W_2^1(Q_T)}.$$

В силу неравенства (14)

$$||Pu||_{L_2(0,T)} \leq pL(||\nu_1||_{L_2(0,T)} + ||\nu_2||_{L_2(0,T)} + K),$$
$$||Hu||_{L_2(0,T)} \leq hL(||\nu_1||_{L_2(0,T)} + ||\nu_2||_{L_2(0,T)} + K),$$

где постоянная K зависит от функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x,t)$. Из последних неравенств следует, что если $RL < 1$, то оператор, определенный формулами (18), (19), является сжимающим, поэтому функции $\nu_i(t), i = 1,2$, однозначно определяются из условий (7) и единственное решение вспомогательной задачи будет решением задачи 2. Заметим, что условие (5) обеспечивает принадлежность функций $\nu_i(t)$ пространству $W_2^1(0,T)$.

Теорема 2. *Если выполнены требования теоремы 1 и условия согласования* (8) *и* (9), *то существует единственное решение задачи 1.*

Доказательство сразу же следует из теоремы 1 и эквивалентности условий (7) и (3).

Замечание 1. Вместо уравнения (1) можно рассмотреть уравнение

$$u_{tt} - a(x)u_{xx} + c(x,t)u = f(x,t).$$

Если $a(x) \in C^1[0,l]$, $a(x) > 0$ и выполняются условия теоремы 2, то в прямоугольнике Q_T поставленная задача однозначно разрешима. Для построения функции $w(x,t)$ нужно в формуле (15) заменить l на $\int_0^l (a(x))^{-1/2}dx$.

Замечание 2. Постановка задачи 1 принадлежит А. И. Кожанову.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

2. *Ильин В. А.* Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // Диффер. уравн. 2000. Т. 36, № 11. С. 1513–1528.

3. *Пулькина Л. С.* Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Диффер. уравн. 2004. Т. 40, № 7. С. 887–892.

Пулькина Людмила Степановна
Россия, Самара, Самарский государственный университет
louise@samdiff.ru