Неклассические уравнения
математической физики
2007. С. 128–136

УДК 517.956+517.968.2+517.984

О СПЕКТРАЛЬНО-НАГРУЖЕННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ В ОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

М. Т. Дженалиев, М. И. Рамазанов, Б. С. Кошкарова

В работе предлагается один из подходов исследования вопросов сильной разрешимости граничных задач для спектрально-нагруженных дифференциальных уравнений параболического типа в ограниченной области.

1. Постановки граничных задач

Задача 1. Рассмотрим в области $Q = \{x,t|\ 0 < x < 1,\ 0 < t < 2\pi\}$ следующую граничную задачу:

$$\mathbb{L}_1 u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha \cdot x \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\Big|_{x=\bar{x}} = f(x,t), \quad \{x,t\} \in Q, \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = u(x,2\pi), \tag{2}$$

где $\overline{x} \in (0,1)$ — фиксированная точка, $\alpha \in \mathbb{C}$ — заданное число,

$$f \in L_2(0,2\pi; W_2^2(0,1) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)) \text{ — заданная функция.} \tag{3}$$

Задача 2. В области $Q = \{x,t|0 < x < 1, 0 < t < 2\pi\}$ изучаются вопросы разрешимости следующей граничной задачи:

$$\mathbb{L}_3 u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha(x)\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial x^k}\Big|_{x=\bar{x}} = f(x,t), \quad \{x,t\} \in Q, \tag{4}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = u(x,2\pi), \tag{5}$$

где

$$\begin{cases} \overline{x} \in (0,1) \text{ — фиксированная точка}, \ \ \alpha \in W_2^{2m}(0,1), \\ f \in L_2(0,2\pi; W_2^{2m}(0,1) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^m(0,1)) \text{ — заданные функции}, \\ k \geqslant 2, \quad m = \begin{cases} k/2, & \text{если } k \text{ — четное число}, \\ (k-1)/2, & \text{если } k \text{ — нечетное число}. \end{cases} \end{cases} \tag{6}$$

Замечание 1. Нагруженный дифференциальный оператор $\mathbb{L}_1$, определяемый соотношениями (1)–(2), в пространстве $L_2(Q)$ не замыкаем, поэтому для изучения задачи (1)–(2) введем в рассмотрение следующую вспомогательную нелокальную задачу:

$$\mathbb{L}_2 u \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \{x,t\} \in Q, \tag{7}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = u(x,2\pi), \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u(1,t)}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^2 u(\overline{x},t)}{\partial x^2} = 0. \tag{9}$$

Отметим, что (в отличие от оператора $\mathbb{L}_1$) оператор $\mathbb{L}_2$ граничной задачи (7)–(9) является замыкаемым оператором в $L_2(Q)$. Кроме того, очевидно, что граничные задачи (1)–(2) и (7)–(9) взаимосвязаны. Действительно, регулярное решение задачи (7)–(9) будет таковым и для задачи (1)–(2). Обратно, если регулярное решение задачи (1)–(2) обладает производными требуемого порядка, то оно будет регулярным решением и задачи (7)–(9).

Уравнения (1), (4) являются нагруженными [1–6]. Особенность данных уравнений заключается в том, что нагруженное слагаемое здесь входит в главную часть оператора, определяемого левой частью данного уравнения. В ранее проведенных исследованиях в основном рассматривались уравнения с такими нагруженными операторами, в которых нагруженные слагаемые играли роль слабого возмущения для их дифференциальной части. Для уравнений (1), (4) последнее не выполняется, поэтому дифференциальные уравнения (1), (4) являются спектрально или “существенно” нагруженными.

Замечание 2. Для изучения задачи (4)–(5) введем в рассмотрение в области Q следующую вспомогательную нелокальную задачу:

$$\mathbb{L}_4 u \equiv \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \alpha^{(2m)}(x) \frac{\partial^k u(\overline{x},t)}{\partial x^k} = \frac{\partial^{2m} f}{\partial x^{2m}}, \tag{10}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = u(x,2\pi), \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} - \alpha(0) \frac{\partial^k u(\overline{x},t)}{\partial x^k} = 0, \quad \frac{\partial^2 u(1,t)}{\partial x^2} - \alpha(1) \frac{\partial^k u(\overline{x},t)}{\partial x^k} = 0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial^{j+1} u(0,t)}{\partial x^j \partial t} - \frac{\partial^{j+2} u(0,t)}{\partial x^{j+2}} + \alpha^{(j)}(0) \frac{\partial^k u(\overline{x},t)}{\partial x^k} = 0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial^{j+1} u(1,t)}{\partial x^j \partial t} - \frac{\partial^{j+2} u(1,t)}{\partial x^{j+2}} + \alpha^{(j)}(1) \frac{\partial^k u(\overline{x},t)}{\partial x^k} = 0, \quad j = 1, \ldots, m-1. \tag{14}$$

Заметим, что граничные задачи (4)–(5) и (10)–(14) взаимосвязаны. Действительно, регулярное решение задачи (10)–(14) будет таковым и для задачи (4)–(5). Обратно, если регулярное решение задачи (4)–(5) обладает производными требуемого порядка, то оно будет регулярным решением и задачи (10)–(14).

Положим $\tilde{C} = \Big\{ u |\, u \in C^{2,\,1}_{x,\,t}(\overline{Q}),\ u_t,\ u_{xx} \in C^{2,\,0}_{x,\,t}(Q), \Big\}$ и пусть выполнены условия (8)–(9).

Определение 1.Функцию $u(x,t)$ будем называть *сильным решением* граничной задачи (7)–(9), если существует последовательность функций $\{u_n(x,t)\}_{n=1}^{\infty} \subset \tilde{C}$ таких, что выполнены следующие условия:

1^0. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x,t) = u(x,t)$ в $L_2(Q)$; 2^0. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{L}_2 u_n(x,t) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ в $L_2(Q)$.

Определение 2. Сильное решение граничной задачи (7)–(9) будем называть *сильным решением* граничной задачи (1)–(2).

2. Теоремы единственности и существования сильного решения

Для граничной задачи 1 имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любой функции* $f \in L_2(0, 2\pi; W_2^2(0,1) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1))$ *граничная задача* (1)–(2) *имеет единственное сильное решение* $u(x,t)$ *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*

$$\delta_s \equiv 1 - \frac{\alpha \cdot \mathrm{sh}\{\lambda\overline{x}\}}{\mathrm{sh}\{\lambda\}} \neq 0 \quad \forall s \in S, \tag{15}$$

где $S = \{s | s = 0; \pm1; \pm2; \dots\}$, $\lambda^2 = is$, $i = \sqrt{-1}$.

Следствие 1. *Пусть* $\alpha \in \mathbb{R}^1$. *В этом случае для справедливости утверждения теоремы 1 достаточно выполнения условия*

$$1 - \alpha\overline{x} \neq 0. \tag{16}$$

Утверждение следствия 1 является простым следствием того факта, что мнимая часть выражения $\dfrac{\mathrm{sh}\{\lambda\overline{x}\}}{\mathrm{sh}\{\lambda\}}$ для любого $s \in S\setminus\{0\}$ не может быть равной нулю, так как знаменатель этого выражения есть число, у которого и действительнаяб и мнимая части всегда отличны от нуля.

Следствие 2. *Пусть* $1 - \alpha\overline{x} = 0$. *Тогда оператор граничной задачи* (1)–(2) *имеет нулевое собственное значение и соответствующая ему собственная функция равна*

$$w_0(x) = x(1 - x^2). \tag{17}$$

Доказательство теоремы 1. В доказательстве этой и ряда последующих теорем мы основываемся на результатах А. А. Дезина [7] по развитию метода разделения переменных для исследования сильной разрешимости линейных граничных задач.

Будем искать решение задачи (7)–(9) на основе следующих разложений:

$$u(x,t) = \sum_{s\in S} u_s(x) e^{is\cdot t}, \quad f(x,t) = \sum_{s\in S} f_s(x) e^{is\cdot t}. \tag{18}$$

Для Фурье-коэффициентов граничной задачи (1)–(2) получим следующую краевую задачу для нагруженного, обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $\forall s \in S$:

$$\begin{cases} isu_s(x) - u_s''(x) + \alpha x u_s''(\overline{x}) = f_s(x), \quad x \in (0,1), \\ u_s(0) = u_s(1) = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Единственное решение задачи (19) представимо в виде

$$\begin{cases} u_s(x) = \alpha\delta_s^{-1} \left[\int\limits_0^1 G_s(\overline{x}, \xi) f_s(\xi) d\xi - \dfrac{1}{\lambda^2} f_s(\overline{x}) \right] \\ \qquad\qquad \times \left[\dfrac{\mathrm{sh}(\lambda x)}{\mathrm{sh}(\lambda)} - x \right] + \int\limits_0^1 G_s(x,\xi) f_s(\xi) d\xi, \quad \forall s \in S \setminus \{0\}, \\ u_0(x) = 6^{-1}\delta_0^{-1} \alpha x (x^2 - 1) f_0(\overline{x}) + \int\limits_0^1 G_0(x,\xi) f_0(\xi) d\xi, \end{cases} \tag{20}$$

где

$$G_s(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{sh}\{\lambda\xi\}\,\mathrm{sh}\{\lambda(1-x)\}}{\lambda\,\mathrm{sh}(\lambda)}, \quad 0 \le \xi \le x \le 1, \\ \dfrac{\mathrm{sh}\{\lambda x\}\,\mathrm{sh}\{\lambda(1-\xi)\}}{\lambda\,\mathrm{sh}(\lambda)}, \quad 0 \le x \le \xi \le 1, \end{cases} \tag{21}$$

в том и только в том случае, когда

$$\delta_s = 1 - \frac{\alpha \cdot \operatorname{sh}(\lambda \overline{x})}{\operatorname{sh}(\lambda)} \neq 0, \quad \forall s \in S. \tag{22}$$

Выражения для $G_0(x,\xi)$ и δ_0 можно получить непосредственно при $s=0$ или же из формул (21) и (22) путем предельного перехода при $\lambda \to 0$ $(s \to 0)$,

$$G_0(x,\xi) = \begin{cases} \xi(1-x), & 0 \le \xi \le x \le 1, \\ x(1-\xi), & 0 \le x \le \xi \le 1, \end{cases}$$

$$\delta_0 = 1 - \alpha \bar{x}.$$

Можно показать, что при достаточной гладкости функций $f_s(x)$ формулы (20) будут определять регулярные решения граничных задач, поставленных для Фурье-коэффициентов задачи (7)–(9). Таким образом, любые конечные суммы вида

$$u^N(x,t) = \sum_{s=-N}^{s=N} u_s(x) e^{is \cdot t},$$

где функции $u_s(x)$ найдены согласно формулам (20) для соответствующей гладкости функций $f_s(x)$, будут определять регулярные решения граничной задачи (7)–(9).

Далее, на основе формул (20) мы получаем априорные оценки

$$\|u_s(x)\|_{L_2(0,1)} \le K \cdot \|f_s''(x)\|_{L_2(0,1)}, \quad s \in S, \tag{23}$$

где постоянная K не зависит от s, т. е. оценки (23) являются равномерными по s.

В дальнейшем при доказательстве оценок (23) будет использовано то, что для функции Грина $G(x,\xi)$ справедлива оценка

$$\int_0^1 \int_0^1 |G_s(x,\xi)|^2 \, dx d\xi \leqslant \frac{C}{|\lambda|^3} \le K = \text{const} \quad \forall s \in S \setminus \{0\} \quad (\lambda^2 = is).$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |G_s(x,\xi)|^2 \, d\xi &\leqslant \frac{1}{|\lambda|^2 |\operatorname{sh}\lambda|^2} \left[|\operatorname{sh}\lambda(1-x)|^2 \int_0^x |\operatorname{sh}\lambda\xi|^2 d\xi \right. \\
&\left. + |\operatorname{sh}\lambda x|^2 \int_x^1 |\operatorname{sh}\lambda(1-\xi)|^2 d\xi \right] = \frac{1}{2|\lambda|^2 |\operatorname{sh}\lambda|^2} \left[|\operatorname{sh}\lambda(1-x)|^2 \int_0^x (\operatorname{ch} 2\lambda_1 \xi - \right. \\
&\left. - \cos 2\lambda_1 \xi) \, d\xi + |\operatorname{sh}\lambda x|^2 \int_x^1 (\operatorname{ch} 2\lambda_1(1-\xi) - \cos 2\lambda_1(1-\xi)) \, d\xi \right] \\
&= \frac{1}{8\lambda_1 |\lambda|^2 |\operatorname{sh}\lambda|^2} \cdot \{ [\operatorname{ch} 2\lambda_1(1-x) - \cos 2\lambda_1(1-x)] (\operatorname{sh} 2\lambda_1 x - \sin 2\lambda_1 x) \\
&\quad + (\operatorname{ch} 2\lambda_1 x - \cos 2\lambda_1 x) [\operatorname{sh} 2\lambda_1(1-x) - \sin 2\lambda_1(1-x)] \} \\
&= \frac{1}{8\lambda_1 |\lambda|^2 |\operatorname{sh}\lambda|^2} [\operatorname{sh} 2\lambda_1 x + \sin 2\lambda_1 x - \operatorname{ch} 2\lambda_1(1-x) \sin 2\lambda_1 x \\
&\quad - \operatorname{sh} 2\lambda_1 x \cos 2\lambda_1(1-x) - \operatorname{ch} 2\lambda_1 x \sin 2\lambda_1(1-x) \\
&\quad - \operatorname{sh} 2\lambda_1(1-x) \cos 2\lambda_1 x]
\end{aligned}$$

$(\lambda = \lambda_1 + i\lambda_1)$. Далее, окончательно имеем

$$\int_0^1 \int_0^1 |G_s(x,\xi)|^2\, dx d\xi = \frac{1}{8\lambda_1 |\lambda|^2 |\operatorname{sh}\lambda|^2} \Bigg(\operatorname{sh} 2\lambda_1 x + \sin 2\lambda_1 x - \frac{\operatorname{ch} 2\lambda_1}{\lambda_1} + \frac{\cos 2\lambda_1}{\lambda_1} \Bigg) \leqslant \frac{C}{|\lambda|^3},$$

здесь $\lambda_1 = \mathrm{Re}\lambda = \mathrm{Im}\lambda$ и $2|\lambda_1|^2 = |\lambda|^2$. Для получения оценок (23) из представления (20) для $s \neq 0$ будем иметь

$$\lambda^2 \cdot \frac{d^2 u_s}{dx^2} = -\lambda^2 f_s(x) + \lambda^4 \int_0^1 G_s(x,\xi) f_s(\xi) d\xi + \alpha \cdot \delta_s^{-1} \lambda^4 \frac{\operatorname{sh}\lambda x}{\operatorname{sh}\lambda} \cdot \left[\int_0^1 G_s(\bar{x},\xi) f_s(\xi) d\xi - \frac{f_s(\bar{x})}{\lambda^2} \right], \quad (24)$$

$$\frac{d^4 u_s(x)}{dx^4} = -\frac{d^2 f_s(x)}{dx^2} + \lambda^4 \int_0^1 G_s(x,\xi) f_s(\xi) d\xi - \lambda^2 f_s(x) + \alpha \delta_s^{-1} \left[\int_0^1 G_s(\bar{x},\xi) f_s(\xi) d\xi - \frac{f_s(\bar{x})}{\lambda^2} \right] \cdot \lambda^4 \cdot \frac{\operatorname{sh}\lambda x}{\operatorname{sh}\lambda}. \quad (25)$$

Для отдельных слагаемых представления решения (20) и их производных (24)–(25) получаем

$$\left\|\lambda^2 f_s(x)\right\|^2_{L_2(0,1)} = \left\||\lambda|^2 f_s(x)\right\|^2_{L_2(0,1)} \leq \left\||\lambda|^{5/2} f_s(x)\right\|^2_{L_2(0,1)}$$

(при этом учитывается то, что $\lambda^2 = is$, $s = \pm 1, \pm 2, \ldots$),

$$\int_0^1 \left| \lambda^4 \int_0^1 G_s(x,\xi) f_s(\xi) d\xi \right|^2 dx \leq \left\| |\lambda|^{5/2} f_s \right\|^2_{L_2(0,1)} \cdot \int_0^1 \left\| |\lambda|^{3/2} G_s \right\|^2_{L_2(0,1)} dx \leq \left\| |\lambda|^{5/2} f_s \right\|^2_{L_2(0,1)} \cdot |\lambda|^3 \cdot \frac{C^2}{|\lambda|^3} = C^2 \left\| |\lambda|^{5/2} f_s \right\|^2_{L_2(0,1)},$$

$$\int_0^1 \left| \lambda^4 \cdot \frac{\operatorname{sh}\lambda x}{\operatorname{sh}\lambda} \int_0^1 G_s(\bar{x},\xi) f_s(\xi) d\xi \right|^2 dx = \frac{|\lambda|^8}{|\operatorname{sh}\lambda|^2} \int_0^1 |\operatorname{sh}\lambda x|^2 dx \left(\int_0^1 |G_s(\bar{x},\xi) f_s(\xi)|\, d\xi \right)^2 \leq K_1 |\lambda|^4 \left\| f_s(x) \right\|^2_{L_2(0,1)} = K_1 \left\| |\lambda|^2 f_s(x) \right\|^2_{L_2(0,1)}.$$

Здесь воспользовались тем, что

$$\int_0^1 |\operatorname{sh}\lambda x|^2 dx = \frac{1}{2|\operatorname{sh}\lambda|^2}\int_0^1 (\operatorname{ch}2\lambda_1 x - \cos 2\lambda_1 x)\,dx = \frac{\operatorname{sh}2\lambda_1 - \sin 2\lambda_1}{4\lambda_1|\operatorname{sh}\lambda|^2} \le \frac{C}{|\lambda|}.$$

Получим оценку последнего слагаемого

$$\left\|\lambda^4\frac{\operatorname{sh}\lambda x}{\operatorname{sh}\lambda}\cdot\frac{f_s(\bar{x})}{\lambda^2}\right\|^2_{L_2(0,1)} = \frac{|\lambda|^4}{|\operatorname{sh}\lambda|^2}\int_0^1 |\operatorname{sh}\lambda x|^2 dx \cdot \left(\int_0^{\bar{x}} |f_s'(\xi)|\,d\xi\right)$$
$$\le C\left\||\lambda|^{3/2}f_s'(x)\right\|^2_{L_2(0,1)} \le C\left\||\lambda|^{3/2}f_s(x)\right\|^2_{W_2^2(0,1)}.$$

Таким образом, имеем

$$\left\||\lambda|^2\cdot\frac{d^2u_s}{dx^2}\right\|^2_{L_2(0,1)} \le K_1\left[\left\||\lambda|^{5/2}f_s(x)\right\|^2_{L_2(0,1)} + \left\||\lambda|^{3/2}f_s(x)\right\|^2_{W_2^2(0,1)}\right].$$

Учитывая, что слагаемые из правой части равенства (24) содержатся и в правой части равенства (25), нетрудно получить следующую оценку

$$\left\|\frac{d^4u_s(x)}{dx^4}\right\|^2_{L_2(0,1)} \le K_2\left[\left\||\lambda|^{5/2}f_s(x)\right\|^2_{L_2(0,1)}\right.$$
$$\left.+\left\||\lambda|^{3/2}f_s(x)\right\|^2_{W_2^2(0,1)} + \|f_s(x)\|^2_{W_2^2(0,1)}\right].$$

Теперь легко можно установить справедливость оценок (23). Действительно, имеем

$$\|u_s(x)\|^2_{L_2(0,1)} \le K\left[\left\|\frac{f_s(x)}{|\lambda|}\right\|^2_{L_2(0,1)} + \left\|\frac{f_s(x)}{|\lambda|^{3/2}}\right\|^2_{L_2(0,1)} + \left\|\frac{f_s(x)}{|\lambda|^2}\right\|^2_{L_2(0,1)}\right]$$
$$\le K_1\left\|\frac{f_s(x)}{|\lambda|}\right\|^2_{L_2(0,1)} \le K_2\,\|f_s(x)\|^2_{L_2(0,1)} \le K_3\,\|f_s''(x)\|^2_{L_2(0,1)}.$$

Для $s=0$ подобные выкладки (на основе формулы (20)) получаются достаточно просто.

Учитывая оценки (23), на основе результатов [7, с. 118–119] доказываем однозначную сильную разрешимость граничной задачи (7)–(9). Отсюда следует утверждение доказываемой нами теоремы.

Кроме этого, из наших рассмотрений следуют оценки вида

$$\|\lambda^2\frac{d^2u_s(x)}{dx^2}\|^2_{L_2(0,1)} + \|\frac{d^4u_s(x)}{dx^4}\|^2_{L_2(0,1)} \le K\left[\left\||\lambda|^{5/2}f_s(x)\right\|^2_{L_2(0,1)}\right.$$
$$\left.+\left\||\lambda|^{3/2}f_s(x)\right\|^2_{W_2^2(0,1)} + \|f_s(x)\|^2_{W_2^2(0,1)}\right], \quad (26)$$

равномерные по $s\in S$, также справедливы следующие оценки для производных

$$\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}\right\|_{L_2(Q)} \le K\left[\|f(x,t)\|_{W_2^{5/4}(0,2\pi;L_2(0,1))}\right.$$
$$\left.+\|f_x(x,t)\|_{W_2^{3/4}(0,2\pi;L_2(0,1))} + \|f(x,t)\|_{L_2(0,2\pi;\,W_2^2(0,1)\cap\mathring{W}_2^1(0,1))}\right].$$

Оценки (26) вместе с (23) указывают на наличие дифференциальных свойств сильного решения исходной граничной задачи.

В завершение заметим, что в условии (3) требование на функцию $f(x,t)$ можно заменить на следующее: $f \in L_2(0,2\pi; W_2^2(0,1))$. В этом случае, оценки (23) принимают вид

$$\|u_s(x)\|_{L_2(0,1)} \le K \cdot \|f_s(x)\|_{W_2^2(0,1)}, \quad s \in S.$$

Приступим к рассмотрению граничной задачи 2.

Определение 3. Функцию $u(x,t)$ будем называть *сильным решением* граничной задачи (10)–(14), если существует последовательность функций $\{u_n(x,t)\}_{n=1}^{\infty} \subset \widetilde{C}$ таких, что выполнены следующие условия:

1^0. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x,t) = u(x,t)$ в $L_2(Q)$;

2^0. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{L}_4 u_n(x,t) = \dfrac{\partial^{2m} f}{\partial x^{2m}}$ в $L_2(Q)$.

Здесь мы считаем, что $u \in \widetilde{C}$, если $u \in C(\overline{Q})$, $u \in C(0,2\pi; C^{2m+2}(0,1) \cap C^{m+1}[0,1])$, $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in C(0,2\pi; C^{2m}(0,1) \cap C^m[0,1])$ и выполнены условия (11)–(14).

Определение 4. Сильное решение граничной задачи (10)–(14) будем называть *сильным решением* граничной задачи (7)–(8).

Из этих определений следует, что области определения замкнутых операторов $\mathbb{L}_3$ и $\mathbb{L}_4$ совпадают. Будем иметь

$$D(\mathbb{L}_3) \equiv D(\mathbb{L}_4) \equiv \Big\{ u|\ u \in L_2(0,2\pi; W_2^{2m+2}(0,1)),$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L_2(0,2\pi; W_2^{2m}(0,1)), \quad \text{граничные условия (11)–(14)} \Big\}. \quad (27)$$

Для граничной задачи 2 справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Для любых* $f \in L_2(0,2\pi; W_2^{2m}(0,1) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^m(0,1))$ $\quad \alpha \in W_2^{2m}(0,1)$ *граничная задача* (4)–(5) *имеет единственное сильное решение* $u(x,t)$, *тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*

$$\delta_s \equiv 1 + \frac{\partial^k}{\partial x^k} \int_0^1 G_s(\overline{x},\xi)\alpha(\xi)d\xi \ne 0, \ \ \forall s \in S, \quad (28)$$

где $S = \{s | s = 0; \pm 1; \pm 2; \dots\}$, $\lambda^2 = is$, $i = \sqrt{-1}$, *функция* $G_s(x,\xi)$ *определена формулой* (21).

Доказательство теоремы 2 проводится аналогично доказательству теоремы 1.

3. Сопряженная задача

Рассмотрим сопряженную к (1)–(2) задачу

$$\mathbb{L}_1^* \psi \equiv -\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \delta''(x - \bar{x}) \otimes \int_0^1 \bar{\alpha} \cdot \xi \cdot \psi(\xi,t) d\xi = g(x,t), \quad \{x,t\} \in Q, \quad (29)$$

$$\psi(0,t) = \psi(1,t) = 0, \quad \psi(x,0) = \psi(x,2\pi), \quad \bar{x} \in (0,1). \quad (30)$$

Здесь учтен тот факт, что $\operatorname{supp}\{\psi(x,t)\} \subseteq \overline{Q}$. Слабое решение $\psi \in L_2(Q)$ этой задачи определим интегральным тождеством

$$(w, \mathbb{L}_1^* \psi) = (\mathbb{L}_1 w, \psi) = (w, g) \;\text{ для любых }\; w \in \widetilde{C} \;\text{ из определения 1.}$$

Вначале покажем, что оператор $\mathbb{L}_1^*$ действительно является сопряжённым к оператору $\mathbb{L}_1$. Для этого достаточно убедиться в справедливости следующего соотношения

$$\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^1 x \frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial x^2} \psi(x,t)dxdt = \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^1 \delta''(x-\bar{x}) \left(\int_0^1 \xi \psi(\xi,t) d\xi \right) u(x,t)dxdt.$$

Действительно

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^1 x \frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial x^2} \psi(x,t)dxdt &= \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^1 x\psi(x,t) \left[\int_0^1 \delta(\xi-\bar{x}) \frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial \xi^2} d\xi \right] dxdt \\
&= \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^1 \delta(x-\bar{x}) \left(\int_0^1 \xi \psi(\xi,t) d\xi \right) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dxdt \\
&= \int_0^{2\pi} \delta(x-\bar{x}) \left(\int_0^1 \xi \psi(\xi,t) d\xi \right) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\bigg|_0^1 dt \\
&\quad - \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^1 \delta'(x-\bar{x}) \left(\int_0^1 \xi \psi(\xi,t) d\xi \right) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dxdt \\
&= -\int_0^{2\pi} \delta(x-\bar{x}) \left(\int_0^1 \xi \psi(\xi,t) d\xi \right) u(x,t)\Big|_0^1 dt \\
&\quad + \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^1 \delta''(x-\bar{x}) \left(\int_0^1 \xi \psi(\xi,t) d\xi \right) u(x,t)dxdt \\
&= \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^1 \delta''(x-\bar{x}) \left(\int_0^1 \xi \psi(\xi,t) d\xi \right) u(x,t)dxdt.
\end{aligned}$$

Как и ранее, применяя метод разделения переменных к задаче (29)–(30), получим систему соответствующих задач для коэффициентов Фурье $\psi_s(x)$, $s \in S\backslash\{0\}$,

$$\begin{cases} -is\psi_s(x) - \psi_s''(x) + \delta''(x-\bar{x}) \displaystyle\int_0^1 \bar{\alpha} \cdot \xi \cdot \psi_s(\xi) d\xi = g_s(x), \quad x \in (0,1), \\ \psi_s(0) = \psi_s(1) = 0. \end{cases}$$

Решения этих задач имеют следующее представление ($g_s(x)$ — соответственно коэффициенты Фурье функции $g(x,t)$):

$$\psi_s(x) = \int_0^1 \tilde{G}_s(x,\xi) g_s(\xi) d\xi + \int_0^1 \xi \psi_s(\xi) d\xi \cdot \left[\lambda^2 \cdot \tilde{G}_s(x,\bar{x}) \right] \quad \forall s \in S,$$

где

$$\tilde{G}_s(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{\sin\{\lambda\xi\}\sin\{\lambda(1-x)\}}{\lambda\sin(\lambda)}, & 0\le\xi\le x\le 1,\\[2mm] \dfrac{\sin\{\lambda x\}\sin\{\lambda(1-\xi)\}}{\lambda\sin(\lambda)}, & 0\le x\le\xi\le 1,\end{cases} \tag{31}$$

в том и только в том случае, когда

$$\tilde{\delta}_s=1+\bar{\alpha}\overline{x}-\bar{\alpha}\frac{\sin(\lambda\overline{x})}{\sin\lambda}\neq 0 \quad \forall s\in S \ \ (\lambda^2=is). \tag{32}$$

Выражения для $\tilde{G}_0(x,\xi)$ и $\tilde{\delta}_0$ также можно получить или непосредственно, или же из формул (31) и (32) путем предельного перехода при $s\to 0$ $(\lambda\to 0)$,

$$\tilde{G}_0(x,\xi)=\begin{cases}\xi(1-x), & 0\le\xi\le x\le 1,\\ x(1-\xi), & 0\le x\le\xi\le 1,\end{cases}$$

$$\tilde{\delta}_0=1.$$

Замечание 3. Если $\alpha\in R^1$, то сопряженная задача (29)–(30) однозначно слабо разрешима для всех функций $g(x,t)$, ортогональных собственной функции $w_0(x)$ (17) исходной граничной задачи (1)–(2) (согласно следствию 2). В этом случае условие (32) выполняется для всех $s\in S$.

Замечание 4. При $g(x,t)\equiv 0$ граничная задача (29)–(30) в классе функций $L_2(0,2\pi;D'(0,1))$ имеет единственное решение $\psi(x,t)=\delta(x-\overline{x})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 205 с.
2. *Кожанов А. И.* Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и о связанной с ним обратной задаче // Мат. заметки. 2004. Т. 76, вып. 6. С. 840–853.
3. *Кожанов А. И.* Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Ж. вычисл. мат. и мат. физики. 2004. Т. 44, № 4. С. 694–716.
4. *Дженалиев М. Т.* К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы, 1995. 270 с.
5. *Дженалиев М. Т.* On the boundary value problems for loaded differential equations // J. Korean Math. Soc. Seoul, 2000. V. 37, № 5. P. 1031–1042.
6. *Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И.* О граничной задаче для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 3. С. 527–547.
7. *Дезин А. А.* Общие вопросы теории граничных задач. М.: Наука, 1980. 207 с.

Дженалиев Мувашархан Танабаевич
Казахстан, Алматы, Институт математики МОН РК
dzhenali@math.kz

Рамазанов Мурат Ибраевич
Казахстан, Караганда, Карагандинский государственный университет им. академика Е. А. Букетова
ramamur@mail.ru

Кошкарова Бахытты Салимовна
Казахстан, Караганда, Карагандинский государственный университет им. академика Е. А. Букетова
b_koshkarova@mail.ru