Неклассические уравнения
математической физики
2007. С. 237–243

УДК 517.95

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ И ИХ СВОЙСТВА В МОДЕЛИ ПОДЛЕДНОГО КОНВЕКТИВНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

А. А. Резванцева

В работе рассматривается модель крупных вихрей (LES-модель) для описания подледного конвективного пограничного слоя глубокого озера. При построении LES модели использовалось расщепление исходной системы уравнений термогидродинамики водоема (система Обербека - Буссинеска). Исследован вопрос существования и единственности решений соответствующей краевой задачи для этой системы.

В данной работе рассматривается модель крупных вихрей (LES-модель) для описания подледного конвективного пограничного слоя глубокого озера. При построении LES модели использовалось расщепление исходной системы уравнений термогидродинамики водоема (модель Обербека – Буссинеска) (см. [1, 2]). Сила Кориолиса в уравнениях движения не учитывается из-за малых горизонтальных масштабов термиков (когерентных структур). Слой пресной воды, охваченный конвекцией составляет лишь несколько десятков метров, поэтому зависимость плотности от давления и минерализации не рассматривается; при этом вместо трехмерной задачи будем рассматривать двумерную. Рассматривается система уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + uu_x + wu_z + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + uw_x + ww_z + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z} = \alpha(\theta - \theta_m)\zeta + \frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\mu\frac{\partial w}{\partial x}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u\zeta_x + w\zeta_z = -w\frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\mu\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial\overline{w\zeta}}{\partial z}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial\overline{w\zeta}}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial z}, \tag{4}$$

где t — время, z — вертикальная координата, направленная вниз, значение $z = 0$ соответствует нижней кромке льда, $R(z,t)$ — количество коротковолновой солнечной радиации, поглощаемой подледным слоем воды, $\overline{(\ldots)} = L^{-1}\int_0^L(\ldots)\,dx$ — оператор осреднения вдоль горизонтальной оси Ox, L — размер области осреднения, μ, ν — положительные постоянные, (u, w) — компоненты вектора скорости, $\theta = \overline{T} = \frac{1}{L}\int_0^L T(x,z,t)\,dx$, — средняя температура и соответственно, $\zeta = T - \overline{T}$ — флуктуация температуры, α, θ_m — некоторые постоянные, p — давление. Система рассматривается в параллелепипеде $Q = \Omega \times (0, Y)$, где $\Omega = (0, L) \times (0, H)$.

Краевые и начальные условия для системы (1)–(4) имеют вид

$$u|_{z=0} = w|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=H} = w|_{z=H} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0, \quad w|_{t=0} = w_0. \qquad (5)$$

$$\zeta|_{z=0} = \theta|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z}\Big|_{z=H} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z}\Big|_{z=H} = \gamma_0, \quad \zeta|_{t=0} = \zeta_0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0 \qquad (6)$$

(γ_0 — некоторая постоянная, H — глубина полного затухания конвективных движений). По переменной x все искомые функции удовлетворяют условиям периодичности.

Данная система введена в работах П. Ю. Пушистова [1, 2] в двух и трехмерном случаях и была построена на основе классической модели термогидродинамики (система Обербека – Буссинеска). Им же были построены численные алгоритмы для решения задачи (1)–(6) для этой и близких моделей и проводились численные эксперименты. В литературе рассматривались различные системы такого вида. Можно отметить, например, ряд работ В. И. Юдовича [3], В. В. Пухначева [4] и ряда других авторов, где для близких систем рассматривались самые разные вопросы в том числе качественные свойства решений, вопросы построения частных решений, вопросы существования и единственности решений и некоторые другие. Однако, задача (1)–(6) довольна специфична и, насколько нам известно, ранее не исследовалась. Здесь возникают нестандартные краевые условия (условие Неймана на части границы) и нестандартные нелинейные слагаемые. В данной работе мы получим теоремы существования и единственности решений (теоремы 1 и 2). В качестве функциональных пространств используем пространства Соболева $W_p^s(\Omega)$.

1. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* $R_z \in L_\infty(0,Y;L_2(\Omega_0))$, $R|_{z=H} = 0$, $R_t \in L_2(Q_0)$ ($Q_0 = \Omega_0 \times (0,Y)$, $\Omega_0 = (0,H)$), $u_0, w_0 \in W_2^2(\Omega)$, u_0, w_0 *- удовлетворяют краевым условиям на* $\partial\Omega$, $u_{0x} + w_{0z} = 0$ ($\forall x \in \Omega$), $\theta_0 \in W_2^2(\Omega_0)$, $\zeta_0 \in W_2^2(\Omega)$, θ_0, ζ_0 *удовлетворяют краевым условиям и условию* $\overline{\zeta_0} = 0$. *Тогда существует единственное решение задачи* (1)–(6) *такое, что*

$$\zeta, w, u \in L_\infty(0,Y;W_2^2(\Omega)), \quad \zeta_t, w_t, u_t \in L_\infty(0,Y;L_2(\Omega)) \cap L_2(0,Y;W_2^1(\Omega)),$$

$$\theta \in L_\infty(0,Y;W_2^2(\Omega_0)), \quad \overline{\zeta} = 0, \quad p \in L_\infty(0,Y;W_2^1(\Omega)), \quad \int\limits_\Omega p\,dx = 0. \qquad (7)$$

Замечание. Условие $R|_{z=H} = 0$ можно заменить на условие $R_z, R_{zt} \in L_2(Q_0)$.

Теорема 2. *Пусть данные задачи* (1)–(6) *удовлетворяют условиям теоремы* 1 *и дополнительно условиям:* $u_0, w_0, \zeta_0 \in W_p^{2-2p}(\Omega)$, $\theta_0 \in W_p^{2-2p}(\Omega_0)$ ($p \geq 2$). *Тогда решение задачи* (1)–(6) *полученное в теореме* 1 *обладает свойством:* $u, w, \zeta \in L_p(0,Y;W_p^2(\Omega))$, $\zeta, w, u \in L_\infty(0,Y;W_p^2(\Omega))$, $\zeta_t, w_t, u_t \in L_p(Q)$, $\theta_t \in L_p(Q_0)$, $\theta \in L_p(0,Y;W_p^2(\Omega_0))$, $p \in L_p(0,Y;W_p^1(\Omega))$.

2. Доказательство теоремы 1

Рассмотрим спектральную задачу

$$\triangle U + \nabla p = \lambda U, \quad \mathrm{div}\ U = 0, \qquad (8)$$

где U — вектор с координатами $\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$, с краевыми условиями: периодичность по x, т. е.

$$u|_{x=0} = u|_{x=L}, \quad w|_{x=0} = w|_{x=L}, \quad u_x|_{x=0} = u_x|_{x=L}, \quad w_x|_{x=0} = w_x|_{x=L}, \tag{9}$$

и

$$u|_{z=0} = w|_{z=0} = w|_{z=H} = u_z|_{z=H} = 0. \tag{10}$$

Обозначим собственные значения этой задачи через β_i. Легко, в соответствии со схемой изложенной в [5], показывается, что из собственных функций этой задачи можно составить ортонормированный базис в подпространстве $L_2(\Omega)$, состоящем из соленоидальных векторных полей. Более того, собственные функции являются достаточно гладкими функциями, в частности, они принадлежат $W_2^2(\Omega)$ и образуют базис в соответствующих подпространствах пространств $W_2^1(\Omega)$ и $W_2^2(\Omega)$. Запишем собственные функции в виде $U_i = \begin{pmatrix} u_i \\ w_i \end{pmatrix}$. Положим $L = \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Складывая (3) и (4) легко увидеть, что температура T удовлетворяет уравнению

$$L_1 T = \frac{\partial T}{\partial t} + uT_x + uT_z - LT = R_z(z,t), \tag{11}$$

условиям периодичности по x и

$$T|_{z=0} = 0, \quad T_z|_{z=H} = \gamma_0 z. \tag{12}$$

Для удобства запишем (1) и (2) в виде

$$L_2 U = U_t + uU_x + wU_z + LU = g(T), \tag{13}$$

где $U = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$, $\quad g(T) = \begin{pmatrix} 0, \\ \lambda(\overline{T} - \theta_m)T \end{pmatrix}$. Пусть скобки $(\cdot,\cdot)_0$ обозначают стандартное скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, т.е. $(u,v) = \int_\Omega uv dx$. Обозначим также символом $(\cdot,\cdot)$ скалярное произведение в $L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$, то есть $(U,V) = (u_1,v_1)_0 + (u_2,v_2)_0$. Ищем приближенное решение задачи (11)–(13), (5) в виде

$$U^n = \sum_{i=1}^n c_{in}(t) U_i, \quad T^n = \chi^n + \tilde{T}^n,$$

где

$$\chi^n = \sum_{i=1}^n \gamma_0 (z,\zeta_i)_0 \zeta_i = \sum_{i=1}^n \chi_i \zeta_i, \quad \tilde{T}^n = \sum_{i=1}^n \alpha_{in}(t) \zeta_i$$

и $\{\zeta_i\}$ — нормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции задачи:

$$\mu\zeta_{xx} + \nu\zeta_{zz} = \lambda\zeta,$$

$$\zeta|_{x=0} = \zeta|_{x=L}, \quad \zeta_x|_{x=0} = \zeta_x|_{x=L}, \quad \zeta|_{z=0} = \zeta_z|_{z=H} = 0.$$

Обозначим через λ_i соответствующие собственные значения. Функции ζ_i образуют ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$ и базис в подпространствах $W_2^1(\Omega)$ и $W_2^2(\Omega)$, состоящих из функций, удовлетворяющих краевым условиям. Легко видеть, что $\|\chi^n - \gamma_0 z\|_{W_2^{3/2-\varepsilon}(0,H)} \to 0$ при $n \to \infty$ при любом $0 < \varepsilon < 3/2$ и функция χ^n не зависит от переменной x, т. е. $\chi^n = \chi(z)$.

Функции c_{in}, α_{in} определяем из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(L_1 T^n, \zeta_i)_0 = (R_z, \zeta_i)_0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{14}$$

$$(L_2U^n, U_i) = (g(T^n), U_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{15}$$

В качестве данных Коши используем данные: $c_{in}(0) = c_{0i}$, $\alpha_{in}(0) = \alpha_{0i}$, где постоянные в правой части — постоянные из разложений

$$U_0 = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{\infty} c_{0i}U_i,$$

$$T_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{0i}\zeta_i, \quad T_0 = \theta_0(z) + \zeta_0$$

Положим также $\widetilde{T_0} = T_0 - \gamma_0 z_0$ Таким образом,

$$T^n(0) = T_0^n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{0i}U_i, \quad U^n(0) = U_0^n = \sum_{i=1}^{n} c_{0i}U_i, \quad \widetilde{T}^n(0) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{0i} - \chi_i)\zeta_i.$$

Из наших условий на данные вытекает, что последовательность $\|\tilde{T}^n(0)\|_{W_2^2(\Omega)}$ равномерно ограничена.

Система разрешима локально по времени. Получим априорные оценки гарантирующие, что система разрешима на всем $[0, Y]$. Умножим (14) на $\lambda_{in} + \chi_i$ и просуммируем по i от 1 до n. Получим

$$(L_1T^n, T^n)_0 = (R_z, T^n).$$

Интегрируя по частям и используя лемму Гронуолла, получим

$$\|T^n\|_{L_\infty(0,Y;L_2(\Omega))} + \|T^n\|_{L_2(0,Y;W_2^1(\Omega))} \le c\|R_z\|_{L_2(Q)}. \tag{16}$$

Умножим (15) на c_{in} и просуммируем по i от 1 до n. Интегрируя по частям, используя лемму Гронуолла и теоремы вложения и стандартные интерполяционные неравенства, получим оценку

$$\|U^n\|_{L_\infty(0,Y;L_2(\Omega))} + \|U^n\|_{L_2(0,Y;W_2^1(\Omega))} \le c\|R_z\|_{L_2(Q)}. \tag{17}$$

Далее оценки проводятся в соответствии со стандартной схемой (см. [7]). Из (14) мы выводим

$$\begin{aligned}\|T_t^n(0)\|^2_{L_2(\Omega)} &= (R_z(0), T_t^n(0))_0 + (LT_0^n, T_t^n(0))_0 - (u_0^nT_{0x}^n + w_0^nT_{0z}^n, T_t^n(0))_0 \\ &\le \big[\|R_z(0)\|_{L_2(\Omega)} + \|L\tilde{T}_0^n\|_{L_2(\Omega)} + \|u_0^n\|_{L_\infty(\Omega)}\|T_{0x}^n\|_{L_2(\Omega)} \\ &\qquad + \|w_0^n\|_{L_\infty(\Omega)}\|T_{0z}^n\|_{L_2(\Omega)}\big]\|T_t^n\|_{L_2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Отсюда получим оценку

$$\|T_t^n(0)\|_{L_2(\Omega)} \le c(\|R_z(0)\|_{L_2(0,H)}, \|T_0^n\|_{W_2^1(\Omega)}, \|\tilde{T}_0^n\|_{W_2^2(\Omega)}, \|U_0^n\|_{L_\infty(\Omega)}). \tag{18}$$

Аналогично из (15) получим оценку

$$\|U_t^n(0)\|_{L_2(\Omega)} \le c(\|T_0^n\|_{L_\infty(\Omega)}, \|U_0^n\|_{W_2^2(\Omega)}). \tag{19}$$

Дифференцируя равенства (14), (15) по t и умножая полученные равенства на α'_{in}, c'_{in} и суммируя по n, получим

$$(\frac{\partial}{\partial t}L_1T^n, T_t^n)_0 = (R_z, T_t^n)_0, \quad (\frac{\partial}{\partial t}L_2U^n, U_t^n) = (g(T^n), U_t^n).$$

Из этого равенства как и в [7] (§ 6.6 гл. 1) получим оценку

$$\|u_t^n\|_{L_\infty(0,Y;L_2(\Omega))} + \|w_t^n\|_{L_\infty(0,Y;L_2(\Omega))} + \|u_t^n\|_{L_2(0,Y;W_2^1(\Omega))} + \|w_t^n\|_{L_2(0,Y;W_2^1(\Omega))} + \|T_t^n\|_{L_\infty(0,Y;L_2(\Omega))} + \|T_t^n\|_{L_2(0,Y;W_2^1(\Omega))} \le c_1, \quad (20)$$

где постоянная c_1 не зависит от n. Наконец, последнюю оценку получим умножая равенства (14), (15) на $\lambda_i\alpha_{in}, \beta_i c_{in}$ и суммируя по n. Получим равенства

$$(L_1T^n, LT^n)_0 = (R_z, LT^n)_0, \quad (L_2U^n, \widehat{LU^n}) = (g(T^n), \widehat{LU^n}).$$

где $\widehat{LU^n}$ — проекция LU^n в $L_2(\Omega)$ на подпространство соленоидальных векторных полей. Используя стандартные свойства этой проекции [5], получим оценку

$$\|u^n\|_{L_\infty(0,Y;W_2^2(\Omega))} + \|w^n\|_{L_\infty(0,Y;W_2^2(\Omega))} + \|\tilde{T}^n\|_{L_\infty(0,Y;W_2^2(\Omega))} + \|\zeta^n\|_{L_\infty(0,Y;W_2^2(\Omega))} \le c_2, \quad (21)$$

где постоянная c_2 зависит от норм правой части и начальных данных.

Предельный переход. Априорные оценки (16), (17), (20), (21) позволяют обосновать предельный переход в системе дифференциальных уравнений и показать, что предельные функции есть решение задачи (11)–(13), (5). Из оценок вытекает, что существуют подпоследовательности $u^{n_k}, w^{n_k}, \tilde{T}^{n_k}$ такие, что

$$u^{n_k}, u_{x_j}^{n_k}, u_t^{n_k}, w^{n_k}, w_{x_j}^{n_k}, w_t^{n_k}, u_{x_ix_j}^{n_k}, w_{x_ix_j}^{n_k} \to u, u_{x_j}, u_t, w, w_{x_j}, w_t, u_{x_ix_j}, w_{x_ix_j} \quad *\text{-слабо в} \quad L_\infty(0,Y;L_2(\Omega)) \quad (i,j = 1,\dots,n),$$

$$w_{tx_j}^{n_k}, u_{tx_j}^{n_k}, \to w_{tx_j}, u_{tx_j} \quad \text{слабо в} \quad L_2(0,Y;L_2(\Omega)) \quad (j = 1,\dots,n).$$

Аналогично найдется подпоследовательность $\tilde{T}^{n_k}$ такая, что

$$\tilde{T}^{n_k}, T_{x_j}^{n_k}, \tilde{T}_t, \tilde{T}_{x_j,x_i}^{n_k} \to \tilde{T}, \tilde{T}_{x_j}, \tilde{T}_t, \tilde{T}_{x_ix_j} \quad *\text{-слабо в} \quad L_\infty(0,Y;L_2(\Omega)) \quad (j = 1,\dots,n)$$

и

$$\tilde{T}_{tx_j}^{n_k} \to \tilde{T}_{tx_j} \quad \text{слабо в} \quad L_2(0,Y;L_2(\Omega)) \quad (j = 1,\dots,n).$$

Предельные функции $u, w, \tilde{T}$ обладают свойствами

$$u_t, w_t, \tilde{T}_t \in L_\infty(0,Y;L_2(\Omega)), \quad u, w, \tilde{T} \in L_\infty(0,Y;W_2^2(\Omega)),$$
$$u_t, w_t, \tilde{T}_t \in L_2(0,Y;W_2^1(\Omega)).$$

Далее, предельный переход осуществляется в соответствии со стандартной схемой, изложенной, например, в [7]. Предельные функции удовлетворят краевым условиям и системам (11), (13) п. в. Усредняя (11) по переменной x и обозначая $\theta = \overline{T}$, придем к (4). Вычитая (4) из (11) и полагая $\zeta = T - \overline{T}$, получим (3).

2. Доказательство теоремы 2

Рассмотрим решение, полученное в теореме 1 и продолжим его в более широкую область. Сначала решения U, T системы продолжим периодическим образом по переменной x. Полученные функции уже будут определены в области $(-\infty,\infty) \times (0,H) \times (0,Y)$ и будут удовлетворять той же самой системе уравнений. В уравнении (11) для температуры сделаем сдвиг $T = T_1 + \gamma_0 z$. Получим уравнение

$$T_{1t} + uT_{1x} + wT_{1z} - LT_1 = R_z - \gamma_0 w = g_2(x,z,t).$$

Построим четное продолжение относительно плоскости $z = H$ функций g_2, u, T_1, p, u_0, T_0 и нечетное продолжение функций w, g_1, w_0 $(g_1 = \alpha(\overline{T} - \theta_m)T)$. Продолженные функции обозначим через $\tilde{u}, \tilde{u_0}, \tilde{w}, \tilde{w}_0, \tilde{T}_1, \tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \tilde{U}$. Например,

$$\widetilde{u}(x,z,t) = \begin{cases} u(x, 2H - z, t), & \text{если } z > H; \\ u(x,z,t), & \text{если } z < H; \end{cases}$$

$$\widetilde{w}(x,z,t) = \begin{cases} -w(x, 2H - z, t), & \text{если } z > H; \\ w(x,z,t), & \text{если } z < H; \end{cases} \quad \tilde{U} = \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{w} \end{pmatrix}.$$

Полученные функции будут удовлетворять системе

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \tilde{u}\tilde{U}_x + \tilde{w}\tilde{U}_z + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} - L\tilde{U} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{g}_1 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

$$\frac{\partial \tilde{T}_1}{\partial t} + \tilde{u}\tilde{T}_{1x} + \tilde{w}\tilde{T}_{1z} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} - L\tilde{T}_1 = \tilde{g}_2 \tag{23}$$

в области $\tilde{Q} = (-\infty, \infty) \times (0, 2H) \times (0, Y)$ и будут в любой области вида $\tilde{Q}_R = \Omega_R \times (0, Y)$, $\Omega_R = (-R, L + R) \times (0, 2H)$ $(R > 0)$ принадлежать классам

$$\tilde{U}, \tilde{T}_1 \in L_\infty(0, Y; W_2^2(\Omega_R)),\ \tilde{U}_t, \tilde{T}_{1t} \in L_\infty(0, Y; L_2(\Omega_R)), \tilde{U}_t, \tilde{T}_{1t} \in L_2(0, Y; W_2^1(\Omega_R)).$$

Возьмем $R > 0$ и рассмотрим функцию $\varphi(x) \in C_0^\infty$ такую, что

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-R, L + R), \\ 0, & |x| > L + 2R. \end{cases}$$

Тогда функции $V = \tilde{U}\varphi$, $R = \tilde{T}_1\varphi$ есть решения начально-краевой задачи с условиями Дирихле на боковой поверхности цилиндра в некоторой области с бесконечно дифференцируемой гладкой границей для системы вида

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} - LV = f_1, \quad \frac{\partial R}{\partial t} - L\tilde{T}_1 = f_2,$$

где, как вытекает из теорем вложения, правые части лежат в $L_\infty(0, Y; L_q(\Omega_R))$ для всех $q \geq 1$ и $R > 0$. Ссылаясь на известные результаты [6, 8], мы получим утверждение теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pushistov P. Yu., Ievlev K. V.* Application of the large eddy method for studying physical mechanisms of supporting diatoms in the photic lake zone covered by ice in the spring period // Bulliten of the Nov. Comput. Center. Novosibirsk: NCC Publisher, 2000. V. 6. P. 55–62.
2. *Пушистов П. Ю.* Математические модели экосистемы водоема для описания подледного весеннего цветения диатомовых водорослей // Труды международной конференции “Информационные технологии и обратные задачи рационального природопользования”. Ханты-Мансийск: ГП-Полиграфист, 2005. С. 185–193.
3. *Юдович В. И.* О неограниченном росте вихря и циркуляции скорости течений стратифицированной и однородной жидкости // Мат. заметки. 2000. Т. 68, № 4. С. 627–636.
4. *Pukhnachev V. V.* Microconvection in a vertical layer // J. Fluid Dyn. 1994. V. 29, N 5. P. 653–660.
5. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости // Современные проблемы математики. Москва, 1961. С. 604–616.

6. *Solonnikov V. A.* L_p - Estimates for solutions to the initial boundary-value problem for the generalized stokes system in a bounded domain // J. Math. Sciences. 2001. V. 105, N 5.
7. *Лионс Ж. Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир. 1972.
8. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука. 1967.

Резванцева Анастасия Анатольевна
Россия, Ханты-Мансийск, Югорский государственный университет
asuta22@yandex.ru