Неклассические уравнения математической физики
2007. С. 251–259

УДК 517.9

К ТЕОРИИ НЕКЛАССИЧЕСКИХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА КУСОЧНО-ГЛАДКОЙ КРИВОЙ

В. Е. Солдатов

В работе изучена фредгольмова разрешимость неклассических сингулярных интегральных уравнений на кусочно-гладкой кривой. Установлена также асимптотика степенно-логарифмического характера решений этих уравнений вблизи особых точек кривой.

Рассмотрим на ориентируемой кусочно-гладкой кривой Γ сингулярное интегральное уравнение

$$a(t_0)\varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{b(t_0,t)}{t-t_0}\varphi(t)dt = f(t_0), \quad t_0 \in \Gamma, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывными коэффициентами a и b. В случае, когда функция b представима в виде

$$b(t_0,t) \equiv b(t_0), \tag{2}$$

это уравнение относится к классическому типу. Теория его разрешимости заложена в трудах Н. И. Мусхелишвили, И. Н. Векуа и их последователей [1]. В данной работе вопросы фредгольмовой разрешимости уравнения (1) изучим при более широких предположениях относительно функции b.

Как и в [1] все рассмотрения будут вестись в весовых классах Гельдера. Пусть конечное множество $F \subseteq \Gamma$ содержит все угловые точки Γ, так что кривая $\Gamma \setminus F$ является гладкой и ее связные компоненты гомеоморфны либо окружности, либо открытому интервалу прямой. Исходя из класса $H(E)$ непрерывных по Гельдеру на множестве E функций, рассмотрим на Γ классы функций $H_{+0}(\Gamma,F) \subseteq H_{-0}(\Gamma,F)$. Первый из них состоит из функций $\varphi \in H(\Gamma)$, обращающихся в нуль в точках $\tau \in F$. Класс H_{-0} состоит из функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих условию

$$\rho_\lambda(t)\varphi(t) \in H_{+0}, \quad \rho_\lambda(t) = \prod\nolimits_{\tau\in F} |t-\tau|^{\lambda_\tau},$$

для любого весового порядка $\lambda = (\lambda_\tau) > 0$. Таким образом, функции $\varphi \in H_{-0}$ допускают в точках $\tau \in F$ особенности логарифмического характера. Весовые классы $H_{\lambda\pm0}$ по определению состоят из функций φ, для которых $\rho_{-\lambda}\varphi \in H_{\pm0}$. Ниже они рассматриваются для весовых порядков $-1 < \lambda < 0$.

Коэффициент a в (1) рассматривается в классе $\hat{H} = \hat{H}(\Gamma,F)$ кусочно-непрерывных по Гельдеру функций с возможными разрывами в точках $\tau \in F$. Более точно, $a \in H(L)$ для любой гладкой дуги $L \subseteq \Gamma$, не содержащей внутри точек из F. Аналогичный смысл имеет класс $\hat{H} = \hat{H}(\Gamma\times\Gamma,F)$ для функции $b(t_0,t)$ двух

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 07-01-00299)

переменных в (1). Более общий класс $\hat{H}_* = \hat{H}_*(\Gamma\times\Gamma, F)$ определяется следующим образом: $b(t_0,t) \in H(L_0\times L)$ при $L_0\cap L = \emptyset$ и

$$b(t_0,t) = b_\tau(t_0,t)h_\tau\left(\frac{|t_0-\tau|}{|t-\tau|}\right), \quad L_0\cap L = \{\tau\}, \tag{3}$$

в окрестности точки $\tau\in F$, где $b_\tau \in H(L_0\times L)$, а функция h_τ ограничена на полуоси и принадлежит $H[\delta,\delta^{-1}]$ для любого $\delta>0$. Заметим, что для элементов b этого класса функция $b(t,t)$ одной переменной принадлежит $\hat{H}$.

Пусть кривая Γ является кусочно-ляпуновской без точек возврата, а уравнение (1) принадлежит к нормальному типу. Последнее означает, что функции

$$c^{\pm}(t) = a(t)\pm b(t,t) \tag{4}$$

обратимы в классе $\hat{H}$, т. е. $\det c^{\pm}(t)\neq 0$ всюду на $\Gamma\setminus F$, включая предельные значения в точках $\tau\in F$. В этом случае можно ввести непрерывную ветвь $h = \ln\det[(c^+)^{-1}c^-]$ на $\Gamma\setminus F$, которая, очевидно, кусочно-непрерывна на Γ и принадлежит классу $\hat{H}(\Gamma,F)$. Тогда комплексное число

$$\mathrm{Ind}_\Gamma c = \frac{1}{2\pi i}[\ln\det c]\big|_\Gamma, \quad c = (c^+)^{-1}c^-, \tag{5}$$

где берется сумма приращений функции h вдоль связных компонент $\Gamma\setminus F$ в соответствии с их ориентацией, не зависит от выбора это ветви. Это число естественно назвать индексом Коши матрицы-функции c на Γ.

В принятом предположении $a(t_0)\in\hat{H}$, $b(t_0,t)\in\hat{H}_*$ оператор уравнения (1) инвариантен в классах $H_{\lambda-0}$, $-1<\lambda\le 0$, и $H_{\lambda+0}$, $-1\le\lambda<0$. Критерий фредгольмовости уравнения (1) в этих классах и формула его индекса описаны в [2]. Основной результат формулируется в терминах так называемого концевого символа. Удобно все рассмотрения вести для векторного случая, когда функция $\varphi = (\varphi_1,\dots,\varphi_l)\in H_{\lambda\pm 0}$ является l-вектор-функций, а коэффициенты $a(t_0)\in\hat{H}$, $b(t_0,t)\in\tilde{H}$ представляют собой $l\times l$-матрицы-функции. При этом в представлении (3) функции h_τ предполагаются скалярными.

В малой окрестности точки $\tau\in F$ кривая Γ состоит из конечного числа гладких дуг $\Gamma_{\tau,k}$, $1\le k\le n_\tau$, с общим концом τ, которые ориентируем от τ в сторону вторых концов этих дуг. Удобно нумерацию этих дуг (при $n_\tau\ge 3$) выбирать в порядке обхода вокруг τ против часовой стрелки. Связь с исходной ориентацией кривой Γ описывается сигнатурой $\varepsilon_{\tau,k}=\pm1$, где выбирается верхний знак, если ориентации Γ и $\Gamma_{\tau,k}$ противоположны, и нижний знак в противном случае. Пусть $q_{\tau,k}\in\mathbb{C}$ есть единичный касательный вектор к дуге $\Gamma_{\tau,k}$ в точке τ, выбранный в соответствии с ее ориентацией. По предположению τ не является точкой возврата кривой Γ, так что вектора $q_{\tau,k}$ попарно различны.

Сужение функции $\varphi(t)$, $t\in\Gamma$, на дугу $L=\Gamma_{\tau,k}$ обозначим $\varphi_{\tau,k}$. Применительно к коэффициенту a это сужение $a_{\tau,k}$ принадлежит, очевидно, $H(\Gamma_{\tau,k})$. Аналогичным образом в представлении (3) полагаем $b_{\tau,jk}(t_0,t) = b_\tau(t_0,t)$, $h_{\tau,jk}(s) = h_\tau(s)$ для $L_0=\Gamma_{\tau,j}$, $L=\Gamma_{\tau,k}$. В этих обозначениях концевой символ уравнения (1) в точке τ представляет собой блочную $n_\tau\times n_\tau$-матрицу-функцию $X_\tau(\zeta)$, заданную и аналитическую в полосе $-1<\mathrm{Re}\,\zeta<0$, с элементами

$$X_{\tau,jk}(\zeta) = a_{\tau,j}(\tau)\delta_{jk} - \varepsilon_{\tau,j}\frac{b_{\tau,jk}(\tau,\tau)}{\pi i}\int_0^{+\infty} s^{-\zeta-1}\frac{h_{\tau,jk}(s)q_{\tau,k}}{q_{\tau,k}-q_{\tau,j}s}ds,$$

где δ_{jk} есть символ Кронекера.

Хорошо известно [3], что

$$\frac{1}{\pi i}\int_0^{+\infty} s^{-\zeta-1}\frac{q_1 ds}{q_1-q_2 s} = \begin{cases} i\operatorname{ctg}\pi\zeta, & q_1=q_2,\\ ie^{i\theta\zeta}\sin^{-1}\pi\zeta, & q_1\neq q_2,\end{cases} \tag{6}$$

где $\theta=\arg(-q_2/q_1)$, $|\theta|<\pi$.

Обозначим Δ_τ множество нулей функции $\det X_\tau$ в полосе $-1<\operatorname{Re}\zeta<0$. Пусть $s_\tau(\zeta)$ и $r_\tau(\zeta)$ означают порядок нуля и полюса, соответственно, функций $\det X_\tau$ и X_τ^{-1} в точке $\zeta\in\Delta_\tau$. Таким образом, $0<r_\tau(\zeta)\le s_\tau(\zeta)$, $\zeta\in\Delta_\tau$.

Поскольку функция $[h_{\tau,jj}(s)-1]/(1-s)$ интегрируема в окрестности $s=1$ и $i\operatorname{ctg}\zeta\to\pm1$ при $\operatorname{Im}\zeta\to\pm\infty$, асимптотическое поведение концевого символа на прямой $\operatorname{Re}\zeta=\lambda_\tau$ описывается равенствами

$$\lim_{\operatorname{Im}\,\zeta\to\pm\infty} X_{\tau,jk}(\zeta)=\delta_{jk}\begin{cases} c^{\pm}_{\tau,k}(\tau), & \varepsilon_{\tau,k}=-1,\\ c^{\mp}_{\tau,k}(\tau), & \varepsilon_{\tau,k}=1.\end{cases} \tag{7}$$

В частности, проекция Δ_τ на вещественную ось есть дискретное множество и найдется столь малое $\delta>0$, что Δ_τ расположено вне полосы $-\delta\le\operatorname{Re}\zeta<0$. Исходя из непрерывной ветви логарифма $\ln\det X_\tau(\zeta)$ на прямой $\operatorname{Re}\zeta=-\delta$, можем ввести комплексное число

$$\operatorname{Ind}X_\tau=\frac{1}{2\pi i}\left[(\ln\det X_\tau)(-\delta+i\infty)-(\ln\det X_\tau)(-\delta-i\infty)\right]. \tag{8}$$

В силу (7) оно связано с концевыми значениями функций (4) в точке τ соотношением

$$\operatorname{Ind}X_\tau=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n_\tau}\varepsilon_{\tau,k}[\ln\det c^{+}_{\tau,k}-\ln\det c^{-}_{\tau,k}]+\text{ целое число.} \tag{9}$$

С уравнением (1) тесно связано союзное однородное уравнение

$$a^\top(t_0)\psi(t_0)-\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{b^\top(t_0,t)}{t-t_0}\psi(t)dt=0,\quad t_0\in\Gamma, \tag{1$'$}$$

где $\top$ означает символ матричного транспонирования. Свойство союзности определяется по отношению к билинейной форме

$$\langle\varphi,\psi\rangle=\int_\Gamma\varphi(t)\psi(t)dt,$$

где под $\varphi(t)\psi(t)$ понимается скалярное произведение $\varphi_1(t)\psi_1(t)+\ldots+\varphi_l(t)\psi_(t)$ векторов. Эта форма имеет смысл для любых $\varphi\in H_{\lambda\pm0}$ и $\psi\in H_{-\lambda-1\mp0}$, поскольку произведение двух функций, одна из которых принадлежит $H{-0}$, а вторая — H_{+0}, также принадлежит H_{+0} . Если линейные операторы N и N' определяются левыми частями (1) и (1$'$), соответственно, то имеем тождество

$$\langle N\varphi,\psi\rangle=\langle\varphi,N'\psi\rangle,$$

выражающее свойство союзности рассматриваемых уравнений.

Союзное уравнение принадлежит к тому же типу, что и исходное, т. е. $a^\top\in\hat H$, $b^\top(t_0,t)\in\hat H_*$. В частности, для него также определена матрица $X'_\tau(\zeta)$ концевого символа. Нетрудно проверить, что матрицы X и X' связаны соотношением $X'_\tau(\zeta)=X^\top_\tau(-\zeta-1)$. Таким образом, преобразование $\zeta\to-\zeta-1$, оставляющее полосу $-1<\operatorname{Re}\zeta<0$ инвариантной, переводит множество Δ на соответствующее множество Δ' и аналогичным свойством обладают характеристики $s(\zeta)$ и $r(\zeta)$.

Теорема 1. *Для любого* $-1 < \lambda \le 0$ *пространство решений однородного уравнения* (1) *в классе* $H_{\lambda-0}$ *конечномерно, а неоднородное уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда выполнены условия ортогональности* $\langle f, \psi \rangle = 0$ *решениям* $\psi \in H_{-\lambda-1+0}$ *однородного союзного уравнения* (1′). *При этом в обозначениях* (5), (8) *размерности* k *и* k' *конечномерных пространств* $\{\varphi \in H_{\lambda-0},\ N\varphi = 0\}$ *и* $\{\psi \in H_{-\lambda-1+0},\ N'\psi = 0\}$ *связаны соотношением*

$$k - k' = \mathrm{Ind}_\Gamma c - \sum\nolimits_{\tau \in F} \mathrm{Ind}\, X_\tau + \sum\nolimits_{\tau \in F} \sum\nolimits_{\zeta \in \Delta_\tau(\lambda_\tau - 0)} s_\tau(\zeta), \tag{10}$$

где $\Delta_\tau(\lambda_\tau - 0)$ *есть пересечение множества* Δ_τ *с полосой* $\lambda_\tau \le \mathrm{Re}\zeta < 0$.

Аналогичные утверждения справедливы для уравнения (1) *в классе* $H_{\lambda+0}$, $-1 \le \lambda < 0$, *по отношению к союзному классу* $H_{-\lambda-1-0}$ *и равенству (10), в котором последняя сумма берется по пересечению* $\Delta_\tau(\lambda_\tau + 0)$ *множества* Δ_τ *с полосой* $\lambda_\tau < \mathrm{Re}\zeta < 0$.

Заметим, что индекс Коши (5) можно переписать в форме

$$\mathrm{Ind}_\Gamma c = \frac{1}{2\pi i} \sum\nolimits_{\tau \in F} \sum\nolimits_{j=1}^{n_\tau} \varepsilon_{\tau,j} (\ln \det c)_{\tau,j}(\tau),$$

поэтому в соответствии с (9) правая часть (10) является целым числом.

Теорема 1 является непосредственным следствием теоремы п. 7.1 из [2], примененной к оператору N уравнения (1). Возможность этого применения обеспечивается принятыми предположениями и замечанием (i) п. 11.2 из [2].

Согласно п. 7.3 из [2], эту теорему можно дополнить описанием асимптотического поведения решений $\varphi \in H_{\lambda-0}$, $-1 < \lambda < 0$, сингулярного уравнения (1) вблизи фиксированной точки $\tau \in F$. Пусть Γ_τ есть обьединение дуг $\Gamma_{\tau,k}$ и $\Delta_\tau(\lambda_\tau)$ означает пересечение множества Δ_τ с прямой $\mathrm{Re}\zeta = \lambda_\tau$.

Теорема 2. *Пусть* $-1 < \lambda_\tau < 0$ *и правая часть* $f \in H_{\lambda-0}$ *уравнения* (1) *принадлежит классу* $H_{\lambda_\tau+0}(\Gamma_\tau, \tau)$. *Тогда функция* $\varphi \in H_{\lambda-0}$ *при* $\Delta_\tau(\lambda_\tau) = \emptyset$ *обладает этим же свойством, а в общем случае допускает разложение*

$$\varphi(t) = \sum\nolimits_{\zeta \in \Delta_\tau(\lambda_\tau)} |t - \tau|^\zeta p_{\zeta,k}(\ln|t - \tau|) + \varphi_k(t), \quad t \in \Gamma_{\tau,k}, \tag{11}$$

где $\varphi_k \in H_{\lambda_\tau+0}(\Gamma_{\tau,k}, \tau)$ *и* $p_{\zeta,k}$ *являются некоторыми многочленами степени не выше* $r_\tau(\zeta) - 1$.

Из этой теоремы, в частности, следует, что каждое решение $\varphi \in H_{-1+0}$ однородного уравнения (1) допускает разложение вида (11) с некоторым λ_τ, принадлежащим проекции множества Δ_τ на вещественную ось. Нужно только принять во внимание, что класс $H_{\nu+0}$ совпадает с обьединением $H_{\nu+\varepsilon+0}$ по $\varepsilon > 0$.

Проекция множества Δ_τ на действительную ось содержится в интервале $(-1, 0)$ и может иметь концы этого интервала своими предельными точками. Предположим, что в окрестности τ функция $b(t_0, t)$ удовлетворяет следующему дополнительному требованию: в представлении (3) функция $h_\tau(s)$, $s > 0$, удовлетворяет условию Гельдера вплоть до $s = 0$, так что $h_\tau \in H[0, n]$ для любого $n > 0$. Тогда с учетом (6) матрица-функция $X_\tau(\zeta)$ мероморфно продолжается в полосу $-1 < \mathrm{Re}\ \zeta < \varepsilon$ с некоторым $\varepsilon > 0$ и допускает единственный полюс в точке $\zeta = 0$, причем его порядок не превосходит 1. В этом случае теорему 2 можно дополнить аналогичным результатом по отношению к случаю $\lambda_\tau = 0$. С этой целью обозначим $\Delta_\tau(0)$ множество нулей функции $\det X_\tau(\zeta)$ на прямой $\mathrm{Re}\ \zeta = 0$, исключая точку $\zeta = 0$ (где эта функция может допускать полюс). Пусть характеристики $s_\tau(\zeta)$ и $r_\tau(\zeta)$ для $\zeta \in \Delta_\tau(0)$ означают то же, что и выше. Удобно r_τ доопределить

также в точке $\zeta = 0$, считая $r_\tau(0) = 0$ в случае, когда эта точка не является полюсом для X_τ^{-1}. Тогда результаты п. 7.3 из [2] приводят к следующему аналогу теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть $\lambda_\tau = 0$ и правая часть уравнения (1) принадлежит классу $\hat{H}(\Gamma_\tau, \tau)$. Тогда имеет место разложение (11), где $\varphi_k \in H(\Gamma_{\tau,k})$, а степени многочленов $p_{\zeta,k}$ не превосходят $r_\tau(\zeta) - 1$, если $\zeta \neq 0$, и $r_\tau(0)$, если $\zeta = 0$.*

Из этой теоремы, в частности, следует, что если $\det X_\tau(\zeta) \neq 0$ при $\operatorname{Re}\zeta = 0$, $\zeta \neq 0$, и матрица-функция X_τ^{-1} допускает в точке $\zeta = 0$ полюс порядка не выше 1 (т. е. если $\Delta_\tau(0) \subseteq \{0\}$ и $r_\tau(0) \leq 1$), то любое решение $\varphi \in H_{-0}$ уравнения (1), правая часть f которого принадлежит классу $\hat{H}(\Gamma_\tau, \tau)$, допускает разложение

$$\varphi(t) = c_k \ln|t - \tau| + \varphi_k(t), \quad t \in \Gamma_{\tau,k},$$

с некоторыми $c_k \in \mathbb{C}^l$ и функцией $\varphi_k \in H(\Gamma_{\tau,k})$. Если дополнительно $r_\tau(0) = 0$, то все c_k в этом разложении равны нулю, т. е. функция φ также принадлежит классу $\hat{H}(\Gamma_\tau, \tau)$. Следуя [1], точки $\tau \in F$ этого типа назовем неособенными (по отношению к рассматриваемому уравнению).

Рассмотрим подробнее случай, когда $b(t_0, t) \in \hat{H}(\Gamma \times \Gamma, F)$. В этом случае в (3) можем положить $h_\tau = 1$ и в соответствии с (2) для элементов концевого символа имеем явные выражения

$$X_{\tau,jk}(\zeta) = \begin{cases} a_{\tau,k}(\tau) - i\varepsilon_{\tau,k} b_{\tau,kk}(\tau,\tau) \operatorname{ctg} \pi\zeta, & j = k, \\ -i\varepsilon_{\tau,k} b_{\tau,kj}(\tau,\tau)(-q_{\tau,j} q_{\tau,k}^{-1})^\zeta \sin^{-1} \pi\zeta, & j \neq k, \end{cases}$$

где ветвь степенной функции q^ζ фиксируется условием $|\arg\ q| < \pi$. Опуская временно символ τ в обозначениях, выберем аргументы $\theta_j = \arg q_j$ единичных векторов q_j по условию $\theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n < \theta_1 + 2\pi$, что в силу принятой нумерации дуг Γ_j возможно. Тогда

$$(-q_j q_k^{-1})^\zeta = \begin{cases} q_j^\zeta q_k^{-\zeta} e^{\pi i\zeta}, & j < k, \\ q_j^\zeta q_k^{-\zeta} e^{-\pi i\zeta}, & j > k. \end{cases}$$

Положим для краткости $z = e^{2\pi i\zeta}$ и воспользуемся очевидными соотношениями

$$\frac{i}{\sin\pi\zeta} = -\frac{2e^{\pi i\zeta}}{z-1}, \quad i \operatorname{ctg} \pi\zeta = -\frac{z+1}{z-1}.$$

Тогда для концевого символа получим выражение

$$q^{-\zeta} X_\tau(\zeta) q^\zeta = (z-1)^{-1}(zC_\tau^+ - C_\tau^-), \quad q^\zeta = \operatorname{diag}\,(q_1^\zeta, \ldots, q_n^\zeta), \tag{12}$$

с постоянными блочно-треугольными $n_\tau \times n_\tau$-матрицами $C_\tau^\pm$, которые в обозначениях (4) определяются равенствами

$$C_{\tau,jk}^+ = \begin{cases} c_{\tau,k}^\pm(\tau), & j = k, \\ \pm 2b_{\tau,jk}(\tau,\tau), & j < k, \\ 0, & j > k, \end{cases} \qquad C_{\tau,jk}^- = \begin{cases} c_{\tau,k}^\mp(\tau), & j = k, \\ 0, & j < k, \\ \mp 2b_{\tau,jk}(\tau,\tau), & j > k, \end{cases}$$

знаки в правых частях которых совпадают со знаком $\varepsilon_{\tau,k}$.

Поскольку

$$\det C_\tau^\pm = \prod_{k,\varepsilon_k=1} \det c_{\tau,k}^\pm \prod_{k,\varepsilon_k=-1} \det c_{\tau,k}^\mp \neq 0, \tag{13}$$

можем ввести матрицу

$$D_\tau = (C_\tau^+)^{-1} C_\tau^-.$$

Обозначим $\sigma(D)$ множество собственных значений матрицы D и пусть $s(\nu; D)$ и $r(\nu; D)$ означают, соответственно, кратность и порядок собственного значения ν, т. е. его кратность в характеристическом и минимальном многочленах этой матрицы. Для $\nu = 1$ также полагаем $r(1, D) = 0$ и в случае, когда $\nu = 1 \notin \sigma(D)$. В принятых обозначениях из (12) заключаем, что Δ_τ совпадает с множеством $\{\zeta,\ e^{2\pi i\zeta} \in \sigma(D_\tau)\}$ и

$$s_\tau(\zeta) = s(e^{2\pi i\zeta}; D_\tau), \quad r_\tau(\zeta) = \begin{cases} r(e^{2\pi i\zeta}; D_\tau), & \zeta \neq 0, \\ \max[0, r(1; D_\tau) - 1], & \zeta = 0. \end{cases} \tag{14}$$

В частности, определение неособенного узла τ сводится к тому, чтобы матрица C_τ не имела положительных собственных значений, отличных от 1, а порядок возможного собственного значения $\nu = 1$ не превосходил единицы.

Легко также вычислить и индекс (8) в рассматриваемом случае. В самом деле, из (12) следует, что

$$\det X_\tau(\zeta) = (\det C_\tau^+) \prod_{\nu \in \sigma(D_\tau)} \left(\frac{z-\nu}{z-1}\right)^{s(\nu)}, \quad z = e^{2\pi i\zeta}.$$

Выберем θ по условию $0 \le \arg\nu < \theta < 2\pi, \quad \nu \in \sigma(D_\tau)$. Поскольку приращение

$$\ln\left(\frac{z-\nu}{z-1}\right)\Big|_\infty^0$$

вдоль луча $\arg z = \theta$ равно $i\arg\nu$, отсюда следует формула

$$\text{Ind } X_\tau = \frac{1}{2\pi} \sum\nolimits_{\nu \in \sigma(D_\tau)} s(\nu; D_\tau) \arg\nu, \quad 0 \le \arg\nu < 2\pi. \tag{15}$$

Исходя из матрицы-функции $c = (c^+)^{-1}c^-$ на Γ, положим

$$d_\tau = \prod_{j=1}^{n_\tau} [c_{\tau,j}(\tau)]^{\varepsilon_{\tau,j}} \in \mathbb{C}^{l\times l}. \tag{16}$$

В силу (13) ее определитель совпадает с $\det D_\tau$.

Рассмотрим классический случай, когда выполнено условие (2). Очевидно, можем ограничиться случаем, когда $b(t_0, t) = b(t_0)$ не зависит от t. Согласно [4] в этом случае собственные значения $\nu \neq 1$ матриц D_τ и d_τ совпадают, причем

$$\begin{gathered} s(\nu; D_\tau) = s(\nu; d_\tau), \quad r(\nu; D_\tau) = r(\nu; d_\tau),\ \nu \neq 1, \\ r(1; D_\tau) \le r(1; d_\tau) + 1. \end{gathered} \tag{17}$$

В качестве иллюстрации дадим явное описание всех обьектов, связанных с концевым символом, в следующем частном случае.

Лемма 1. *Пусть $l \times l$-матрица-функция $b(t_0, t)$ принадлежит классу $\hat{H}(\Gamma \times \Gamma, F)$. Пусть $n_\tau = 2$, $\varepsilon_{\tau,1} = -\varepsilon_{\tau,2} = 1$, $a_{\tau,1} = a_{\tau,2} = 0$ в фиксированной точке $\tau \in F$ и $\beta_\tau = b_{11}^{-1}(\tau,\tau) b_{12}(\tau,\tau) b_{22}^{-1}(\tau,\tau) b_{21}(\tau,\tau)$. Тогда множество Δ_τ состоит из всех точек $\zeta \neq 0$ полосы $-1 < \mathrm{Re}\zeta \le 0$, для которых $\cos^2\pi\zeta \in \sigma(\beta_\tau)$, характеристики*

$$s_\tau(\zeta) = \begin{cases} s(\cos^2\pi\zeta; \beta_\tau), & \zeta \neq 1/2, \\ 2s(0; \beta_\tau), & \zeta = 1/2, \end{cases} \tag{18}$$

$$r_\tau(\zeta) = \begin{cases} r(\cos^2 \pi\zeta; \beta_\tau), & \zeta \neq 0, 1/2, \\ 2r(0; \beta_\tau) - 1, & \zeta = 1/2, \\ \max[0, 2r(1; \beta_\tau) - s], & \zeta = 0,\ 0 \leq s \leq 2, \end{cases} \tag{19}$$

и справедливо равенство

$$\text{Ind } X_\tau = l - l_\tau, \tag{20}$$

где l_τ *означает число всех собственных значений матрицы* β_τ *на полуоси* $[1, +\infty)$, *взятое с учетом их кратности.*

Доказательство. Опуская символ τ в обозначениях, рассмотрим матрицы $C^\pm$, фигурирующие в (12). В принятых предположениях они принимают следующий вид

$$C^+ = \begin{pmatrix} b_{11} & -2b_{12} \\ 0 & -b_{22} \end{pmatrix}, \quad C^- = \begin{pmatrix} -b_{11} & 0 \\ -2b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

где для краткости положено $b_{jk} = b_{\tau,jk}(\tau, \tau)$. Выделяя слева от этих матриц диагональный множитель $\operatorname{diag}(b_{11}, b_{22})$ и полагая

$$\beta_1 = b_{11}^{-1} b_{12}, \quad \beta_2 = b_{22}^{-1} b_{21} \in \mathbb{C}^{l \times l},$$

получим

$$D = (C^+)^{-1} C^- = \begin{pmatrix} -1 + 4\beta_1\beta_2 & -2\beta_1 \\ 2\beta_2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно найти спектр $\sigma(D)$ и спектральные характеристики $s(\nu; D)$ и $r(\nu; D)$ матрицы D. С этой целью заметим, что

$$(z - D) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\beta_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+1 & 2\beta_1 \\ 2z\beta_2 & z+1 \end{pmatrix}.$$

В частности,

$$\det(z - D) = \det p(z), \quad p(z) = (z+1)^2 - 4z\beta_1\beta_2. \tag{21}$$

Обращая систему уравнений

$$(z+1)\xi_1 + 2\beta_1\xi_2 = \eta_1, \quad 2z\beta_2\xi_1 + (z+1)\xi_2 = \eta_2,$$

приходим к также равенству

$$(z - D)^{-1} = \begin{pmatrix} (z+1)p^{-1}(z) & -2p^{-1}(z)\beta_1 \\ 2\beta_2 p^{-1}(z) & (z+1)^{-1}[1 - 4\beta_2 p^{-1}(z)\beta_1] \end{pmatrix}. \tag{22}$$

В обозначениях леммы произведение $\beta_1\beta_2 = \beta$, кроме того, $\det D = 1$ и, значит, функция $1/z$ определена в окрестности $\sigma(D)$. Равенство (21) показывает, что преобразование

$$z \to \ \gamma(z) = \frac{(z+1)^2}{4z}$$

переводит $\sigma(D)$ на $\sigma(\beta)$, причем

$$s(z; D) = \begin{cases} s[\gamma(z); \beta], & z \neq \pm 1, \\ 2s[\gamma(z); \beta], & z = \pm 1, \end{cases}$$

Здесь учтено, что уравнение $\gamma(z) = w$ для $w \neq 0, 1$ имеет два различных корня ν_1, ν_2, и имеет один кратный корень $\nu = -1$ и $\nu = 1$ для, соответственно, $w = 0$

и $w = 1$. Поскольку $\gamma(e^{2\pi\zeta}) = \cos^2\zeta$, совместно с первым равенством (14) отсюда следует (18).

Заметим, что корни $\nu_{1,2}$ уравнения $\gamma(z) = w$ не лежат на положительной полуоси тогда и только тогда, когда w не лежит на полуоси $[1, +\infty)$. В этом случае сумма $\arg\nu_1 + \arg\nu_2$, где $0 < \arg\nu_j < 2\pi$, в точности равна 2π, поскольку произведение $\nu_1\nu_2 = 1$. Это верно и по отношению к корню $\nu = -1$ уравнения $\gamma(z) = 0$ с учетом его двойной кратности. Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi}\sum\nolimits_{\nu\in\sigma(D)} s(\nu; D)\arg\nu = \sum\nolimits_{w\in\sigma_0(\beta)} s(w;\beta), \quad 0 \le \arg\nu < 2\pi,$$

где $\sigma_0(\beta)$ есть часть $\sigma(\beta)$, лежащая вне полуоси $[1, +\infty)$. Поскольку сумма всех $s(w, \beta)$ равна l, совместно с (15) отсюда следует (20).

Обратимся к оставшемуся равенству (19) леммы. В соответствии с (14) достаточно убедиться, что

$$r(z; D) = \begin{cases} r[\gamma(z);\beta], & z \ne \pm 1, \\ 2r(1;\beta), & z = 1, \\ 2r(0;\beta) + 1 - s, & z = -1,\ 0 \le s \le 2. \end{cases} \tag{23}$$

Пусть $\nu = -1 \in \sigma(D)$, т. е. $w = 0 \in \sigma(\beta)$. Тогда по определению матрица-функция $(w-\beta)^{-1}$ в точке $w = 0$ имеет полюс порядка $r(0;\beta)$, или, что равносильно, представима в виде $(w-\beta)^{-1} = w^{r(0;\beta)}h(w)$, где h аналитична в окрестности $w = 0$ и $h(0) \ne 0$. Подставляя в это разложение в выражение (21) для $p(z)$, получим представление $p(z) = (z+1)^{2r(0,\beta)}g(z)$, где g аналитична в окрестности $z = -1$ и $g(-1) \ne 0$. Согласно (22) отсюда приходим к аналогичному представлению

$$(z-D)^{-1} = (z+1)^{2r(0,\beta)+1}G(z), \quad G(-1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4\beta_2 g(-1)\beta_1 \end{pmatrix}.$$

Если $-4\beta_2 g(-1)\beta_1 = 0$, то из тех же соображений

$$(z-D)^{-1} = (z+1)^{2r(0,\beta)}G(z), \quad G(-1) = \begin{pmatrix} 0 & -2g(-1)\beta_1 \\ 2\beta_2 g(-1) & -4\beta_2 g'(-1)\beta_1 \end{pmatrix}.$$

Наконец, если $g(-1)\beta_1 = \beta_2 g(-1) = \beta_2 g'(-1)\beta_1 = 0$, то

$$(z-D)^{-1} = (z+1)^{2r(0,\beta)-1}G(z),$$

где $[G(-1)]_{11} = g(-1) \ne 0$. Тем самым соответствующее равенство в (23) установлено. Остальные равенства доказываются аналогично.

Особо отметим частный случай, когда $\beta = 1$. Лемма показывает, что тогда $\Delta_\tau = \emptyset$, $r_\tau(0) = 1$ и $\operatorname{Ind} X_\tau = 0$. Указанный случай реализуется, например, когда b удовлетворяет условию (2). Заметим, что в этом случае (23) согласуется с (17).

Условия леммы, например, выполняются, когда коэффициент $a(t) = 0$, а множество F состоит из единственной точки τ. В частности, кривая Γ в этом случае является контуром.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
2. *Солдатов А. П.* Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. М.: Высшая школа, 1991.

3. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, II. М.: Наука, 1974.
4. *Солдатов А. П.* К теории сингулярных интегральных операторов классического вида // Диффер. уравн. 1979. Т. 15, № 3. С. 529–544.

Солдатов Александр Павлович
Россия, Нальчик, Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН
soldatov48@mail.ru