Неклассические уравнения
математической физики
2007. С. 260–272

УДК 517.9

О СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Р. В. Сорокин

В работе исследовано поведение решения задачи идентификации функции источника многомерного параболического уравнения при $t \to +\infty$. Получены достаточные условия ограниченности решения при всех t и его стремления к нулю при $t \to +\infty$.

Вопросы стабилизации решения задачи идентификации для одномерного параболического уравнения исследовались в [2]. В данной работе исследуется аналогичная задача для многомерного параболического уравнения.

В многомерной полосе $G_{[0,+\infty)} = \{(t,x,z)|\ t \geqslant 0,\ x \in E_n,\ z \in E_1\}$ рассмотрим задачу Коши

$$u_t = L_x(u) + a(t)u_{zz} + b(t)u_z + c(t)u + g(t,x)f(t,x,z), \tag{1}$$

$$u(0,x,z) = u_0(x,z), \quad x \in E_n,\ z \in E_1. \tag{2}$$

Здесь

$$L_x(u) = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(t)u_{x_jx_k} + \sum_{j=1}^{n} a_j(t)u_{x_j},$$

$$\mu|\xi|^2 \leqslant \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(t)\xi_j\xi_k \quad \forall \xi \in E_n,\ t \in [0,T],\ \mu = \text{const} > 0.$$

Коэффициенты $a_{jk}(t)$, $a_j(t)$, $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $f(t,x,z)$ — непрерывные, действительнозначные функции своих аргументов, заданные при $t \geqslant 0$ и в $G_{[0,+\infty)}$ соответственно. Коэффициент $g(t,x)$ является неизвестным и подлежит определению одновременно с функцией $u(t,x,z)$.

Пусть выполняется условие переопределения

$$u(t,x,0) = \beta(t,x), \quad x \in E_n,\ t \in [0,T], \tag{3}$$

где $\beta(t,x)$ — заданная действительнозначная функция, удовлетворяющая условию согласования

$$u_0(x,0) = \beta(0,x), \quad x \in E_n. \tag{4}$$

Работа поддержана грантом Сибирского федерального университета № 46 2007 г. в рамках реализации научно-методических проектов

Предположим, что входные данные в $G_{[0,+\infty)}$ удовлетворяют следующим условиям

$$
\begin{aligned}
&|a_{jk}(t)| + |a_j(t)| + |a(t)| + |b(t)| + |c(t)| \leqslant C, \quad j,k = 1,2,\\
&\left|D_x^\alpha \beta(t,x)\right| + \left|\tfrac{\partial}{\partial t} D_x^\alpha \beta(t,x)\right| \leqslant C,\\
&|f(t,x,0)| \geqslant \delta > 0, \qquad c(t) \leq 0.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Здесь и далее C — некоторые положительные постоянные, вообще говоря, различные.

Предполагая, что функция $u(t,x,z)$ допускает преобразование Фурье по переменной z, приходим к задаче Коши для линейного интегро-дифференциального уравнения в области $\widetilde{G}_{[0,T]} = \{(t,x,y)|\ 0 \leq t \leq T,\ x \in E_n,\ y \in E_1\}$

$$
\begin{aligned}
v_t = L_x(v) - ay^2 v + iybv + cv&\\
+ \operatorname{Re}\left(\gamma + a\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 v\,dy - ib\int_{-\infty}^{+\infty} yv\,dy\right)& f^{-1}(t,x,0)F(t,x,y),
\end{aligned}
\tag{6}
$$

$$
v(0,x,y) = v_0(x,y). \tag{7}
$$

Здесь $\gamma(t,x) = \beta_t(t,x) - c(t)\beta(t,x) - L_x(\beta(t,x))$.

Предположим, что функции $F(t,x,y)$ и $v_0(x,y)$ в $\widetilde{G}_{[0,+\infty)}$ удовлетворяют следующим соотношениям

$$
\begin{aligned}
&|y^{k+\varepsilon} D_x^\alpha F| + |y^{k+\varepsilon} D_x^\alpha v_0| \leq C, \quad |\alpha| \leq 3,\ k = 0,1,\ldots,3,\\
&|y^{k+\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} D_x^\alpha F| + |y^{k+\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} D_x^\alpha v_0| \leq C, \quad |\alpha| \leq 2,\ k = 0,1,\ldots,3,\ \varepsilon = \mathrm{const} > 0.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Рассмотрим задачу (6), (7) в области $\widetilde{G}_{[0,T]} = \{(t,x,y)|\ 0 \leq t \leq T,\ x \in E_n,\ y \in E_1\}$. Здесь $T > 0$ — некоторая фиксированная постоянная. Слабо аппроксимируем задачу (6)–(7) следующим образом

$$
v_t^\tau = 2L_x(v^\tau), \qquad m\tau < t \leq (m + \tfrac{1}{2})\tau, \tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
v_t^\tau = -2ay^2 v^\tau + 2iybv^\tau + 2cv^\tau + 2\operatorname{Re}\left(\gamma + a\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 v^\tau\,dy - ib\int_{-\infty}^{+\infty} yv^\tau\,dy\right)&\\
\times f^{-1}(t,x,0)F(t,x,y), \quad (m + \tfrac{1}{2})\tau < t \leq (m+1)\tau,&
\end{aligned}
\tag{10}
$$

$$
v^\tau(0,x,y) = v_0(x,y). \tag{11}
$$

Здесь $m = 0,1,\ldots N-1$, $N\tau = T$.

Покажем, что последовательность $\{v^\tau\}$ решений задачи (9)–(11) сходится к решению задачи (6)–(7) равномерно на каждом компакте в $G_{[0,T]}$ для любого фиксированного $T > 0$.

Рассмотрим при $t \in [t_0, t_0 + \theta]$ $(t_0, \theta > 0)$ задачу Коши

$$
\begin{aligned}
V_t = -2ay^2 V + 2iybV + 2cV + 2\operatorname{Re}\left(\gamma + a\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 V\,dy - ib\int_{-\infty}^{+\infty} yV\,dy\right)&\\
\times f^{-1}(t,x,0)F(t,x,y) + \Phi(t,x,y),&
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$$
V(t_0,x,y) = V_{t_0}(x,y). \tag{13}
$$

Здесь $x, y \in E_{n+1}$ — параметры.

Введем обозначения

$$Y_k = \sum_{j=0}^{k} y^j.$$

Имеет место следующая

Лемма 1. *Пусть выполняются условия* (5), (8) *и для функции* $\Phi(t,x,y)$ *справедливо соотношение*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Y_2 |\Phi(t,x,y)|\, dx \le C. \tag{14}$$

Тогда решение задачи (12)–(13) *на любом отрезке* $[t_0, t_0+\theta]$ *удовлетворяет неравенству*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Y_2 |V|\, dy \le e^{C_1\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} Y_2 |V_{t_0}|\, dy + C_2\theta. \tag{15}$$

Доказательство. Пусть

$$\begin{aligned}
&V(t,x,y) = V_1(t,x,y) + iV_2(t,x,y),\\
&\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2, \quad F = F + iF,\\
&\Psi = Re\left(\gamma + a\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 V\, dy - ib\int_{-\infty}^{+\infty} yV\, dy\right).
\end{aligned}$$

Тогда уравнение (12) перепишем следующим образом

$$\begin{cases} \frac{1}{2}V_{1t} = -ay^2V_1 - ybV_2 - cV_1 + \Psi F_1 + \Phi_1,\\ \frac{1}{2}V_{2t} = -ay^2V_2 + ybV_1 - cV_2 + \Psi F_2 + \Phi_2. \end{cases} \tag{16}$$

В системе (16) первое уравнение умножим на V_1, второе — на V_2

$$\begin{cases} \frac{1}{2}V_{1t}V_1 = -ay^2V_1^2 - ybV_2V_1 - cV_1^2 + \Psi F_1V_1 + \Phi_1V_1,\\ \frac{1}{2}V_{2t}V_2 = -ay^2V_2^2 + ybV_1V_2 - cV_2^2 + \Psi F_2V_2 + \Phi_2V_2 \end{cases}$$

и просуммируем

$$\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial t}|V|^2 = -ay^2|V|^2 + c|V|^2 + \Psi(F_1V_1 + F_2V_2) + \Phi_1V_1 + \Phi_2V_2.$$

Разделив последнее уравнение на $|V|$, получим, что для почти всех t выполнено

$$\frac{\partial}{\partial t}|V| + 2y^2|a||V| - 2c|V| \le 4|\Psi||F| + 2|\Phi|. \tag{17}$$

Умножим неравенство (17) на Y_2, и проинтегрируем по y, а затем по t.

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} Y_2|V|\, dy + \int_{t_0}^{t} |a| \int_{-\infty}^{+\infty} y^2Y_2|V|\, dyd\tau - 2\int_{t_0}^{t} c\int_{-\infty}^{+\infty} Y_2|V|\, dy\, d\tau\\
&\le \frac{4}{\delta}\int_{t_0}^{t}\left(|a| + |b|\int_{-\infty}^{+\infty} Y_2|F|\, dy\int_{-\infty}^{+\infty} Y_2|V|\, dy\right) d\tau + \frac{4}{\delta}\int_{t_0}^{t}\left(|\gamma|\int_{-\infty}^{+\infty} Y_2|F|\, dy\right) d\tau
\end{aligned}$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2|V_{t_0}|\,dy + 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{t_0}^{t} Y_2|\Phi|\,dy\,d\tau. \quad (18)$$

Используя (5), (8), (14), неравенство (18) можно записать в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2|V|\,dy \le \int\limits_{t_0}^{t}\left(C_1\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2|Y|\,dy + C_2\right)d\tau + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2|V_{t_0}|\,dy.$$

Применяя к полученному неравенству лемму Гронуолла, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2|V|\,dy \le e^{C_1(t-t_0)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2|V_{t_0}|\,dy + \frac{C_2}{C_1}\Big(e^{C_1(t-t_0)} - 1\Big). \quad (19)$$

Разложим последнее слагаемое в неравенстве в ряд Тейлора при $t \in [t_0, t_0+\theta]$ в предположении малости θ.

$$\frac{C_2}{C_1}\left(e^{C_1(t-t_0)} - 1\right) \leqslant \frac{C_2}{C_1}\left(e^{C_1\theta} - 1\right)$$
$$= \frac{C_2}{C_1}\left(-1 + 1 + C_1\theta + \frac{(C_1\theta)^2}{2!} + \ldots + \frac{(C_1\theta)^n}{n!} + \ldots\right) \leqslant \frac{C_2}{C_1}\,\frac{C_1\theta}{1 - C_1\theta} \leqslant C_2\theta.$$

Подставляя полученный результат в (19), получаем неравенство (15). Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть выполняются условия* (5), (8). *Пусть также в* $\widetilde{G}_{[0,T]}$ *справедливы соотношения*

$$Y_\lambda|\Phi| \le C \quad (0 \le \lambda \le 4), \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2|V|\,dy \le C, \quad (20)$$

где V *— решение задачи* (12)–(13). *Тогда на любом отрезке* $[t_0, t_0+\theta]$ *справедливо неравенство*

$$Y_\lambda|V| \le Y_\lambda|V_{t_0}| + C\theta. \quad (21)$$

Доказательство. Рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 1, придем к неравенству (17). Умножив его на Y_λ и проинтегрировав по переменной t на отрезке $[t_0, t]$, получим

$$Y_\lambda|V| + \int\limits_{t_0}^{t} |a|y^2 Y_\lambda|V|\,d\tau - 2\int\limits_{t_0}^{t} cY_\lambda|V|\,d\tau$$
$$\le \frac{4}{\delta}\int\limits_{t_0}^{t}\left(|a|Y_\lambda|F|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2|V|\,dy\right)d\tau + \frac{4}{\delta}\int\limits_{t_0}^{t}\left(|b|Y_\lambda|F|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2|V|\,dy\right)d\tau$$
$$+ \frac{4}{\delta}\int\limits_{t_0}^{t}\left(|\gamma|Y_\lambda|F|\,dy\right)d\tau + Y_\lambda|V_{t_0}| + 2\int\limits_{t_0}^{t} Y_\lambda|\Phi|\,d\tau. \quad (22)$$

Учитывая (5), (8), (20), из последнего неравенства очевидным образом получаем утверждение леммы.

Вернемся к расщепленной задаче (9)–(11). Рассмотрим нулевой целый шаг ($m = 0$). Из принципа максимума для параболического уравнения следует, что на первом дробном шаге выполнено неравенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2 \sup_{x \in E_n} |v^\tau(t,x,y)|\, dy \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2 \sup_{x \in E_n} |v_0(x,y)|\, dy, \quad 0 < t \le \frac{\tau}{2}.$$

Тогда, используя результат леммы 1, получаем, что на втором дробном шаге справедливо неравенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2 \sup_{x \in E_n} |v^\tau(t,x,y)|\, dy \le e^{C_1\tau/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2 \sup_{x \in E_n} |v_0^\tau(x,y)|\, dy + C_2\tau/2, \quad \frac{\tau}{2} < t \le \tau.$$

Рассмотрим первый целый шаг ($m = 1$).

На первом дробном шаге, применяя принцип максимума, имеем неравенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2 \sup_{x \in E_n} |v^\tau(t,x,y)|\, dy \le e^{C_1\tau/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2 \sup_{x \in E_n} |v_0^\tau(x,y)|\, dy + C_2\tau/2, \quad \tau < t \le \frac{3\tau}{2}.$$

На втором дробном шаге, пользуясь результатом леммы 1, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2 \sup_{x \in E_n} |v^\tau(t,x,y)|\, dy \le e^{2C_1\tau/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2 \sup_{x \in E_n} |v_{t_0}^\tau(x,y)|\, dy$$
$$+ e^{C_1\tau/2} C_2\tau/2 + C_2\tau/2, \quad \frac{3\tau}{2} < t \le 2\tau.$$

Продолжая рассуждения, получим, что на m-ом целом шаге ($m = 0, 1, \ldots, N-1$) выполнено неравенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2 \sup_{x \in E_n} |v^\tau(t,x,y)|\, dy$$
$$\le e^{(m+1)C_1\tau/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2 \sup_{x \in E_n} |v_{t_0}^\tau(x,y)|\, dy + C_2\tau/2\big(e^{mC_1\tau/2} + e^{(m-1)C_1\tau/2} + \cdots + 1\big)$$
$$\le e^{NC_1\tau/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2 \sup_{x \in E_n} |v_{t_0}^\tau(x,y)|\, dy + NC_2 e^{NC_1\tau/2}\tau/2$$
$$\le e^{C_1T/2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2 \sup_{x \in E_n} |v_{t_0}^\tau(x,y)|\, dy + C_2 e^{C_1T/2} T/2 \le C,$$
$$(m-1)\tau < t \le m\tau.$$

Отсюда равномерно по τ

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2 \sup_{x \in E_n} |v^\tau(t,x,y)|\, dy \le C, \quad 0 \le t \le T. \tag{23}$$

Докажем теперь, что для всех $t \in [0, T]$ справедлива равномерная по τ оценка

$$Y_{3+\varepsilon} \sup_{x,y \in E_{n+1}} |v^\tau(t,x,y)| \le C, \quad 0 \le t \le T. \tag{24}$$

Рассмотрев нулевой целый шаг, получаем, что на первом дробном шаге в силу принципа максимума справедливо

$$Y_{3+\varepsilon} \sup_{x,y \in E_{n+1}} |v^\tau(t,x,y)| \le Y_{3+\varepsilon} \sup_{x,y \in E_{n+1}} |v_0(x,y)|, \quad 0 < t \le \frac{\tau}{2}.$$

Тогда на втором дробном шаге в силу леммы 2 выполняется неравенство

$$Y_{3+\varepsilon} \sup_{x,y \in E_{n+1}} |v^\tau(t,x,z)| \le C\tau/2 + Y_{3+\varepsilon} \sup_{x,y \in E_{n+1}} |v_0(x,y)|.$$

Рассматривая последующие шаги, получим, что на m-ом целом шаге справедлива оценка

$$\begin{aligned} Y_{3+\varepsilon} \sup_{x,y \in E_{n+1}} |v^\tau(t,x,z)| &\le mC\tau/2 + Y_{3+\varepsilon} \sup_{x,y \in E_{n+1}} |v_0(x,y)| \\ &\le NC\tau/2 + Y_{3+\varepsilon} \sup_{x,y \in E_{n+1}} |v_0(x,y)| \le CT/2 + Y_{3+\varepsilon} \sup_{x,y \in E_{n+1}} |v_0(x,y)| \le C. \end{aligned}$$

Продифференцируем задачу (9)–(11) по x_j

$$V_t^\tau = 2L_x(V^\tau), \quad m\tau < t \le (m + \tfrac{1}{2})\tau, \tag{25}$$

$$\begin{aligned} V_t^\tau = -2ay^2V^\tau + 2iybV^\tau + 2cV^\tau + 2\mathrm{Re}\left(\gamma_{x_j} + a\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 V^\tau\,dy - ib\int_{-\infty}^{+\infty} yV^\tau\,dy\right) \\ \times f^{-1}(t,x,0)F(t,x,y) + \Phi(t,x,y), \quad (m + \tfrac{1}{2})\tau < t \le (m+1)\tau, \end{aligned} \tag{26}$$

$$V^\tau(0,x,y) = V_0(x,y), \tag{27}$$

Здесь

$$V^\tau(t,x,y) = v^\tau_{x_j}(t,x,y), \quad V_0(x,y) = v_{0x_j}(x,y),$$

$$\Phi(t,x,y) = \mathrm{Re}\left(\gamma + a\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 v^\tau\,dy - ib\int_{-\infty}^{+\infty} yv^\tau\,dy\right)\big(f^{-1}(t,x,0)F(t,x,y)\big)_{x_j}.$$

Из (5), (8), (23) видно, что функция $\Phi(t,x,y)$ удовлетворяет условию (14) и, следовательно, для задачи, решаемой на втором дробном шаге, справедлива лемма 1, а для задачи, решаемой на первом дробном шаге, — принцип максимума для параболического уравнения. Рассуждая так же, как и при выводе оценки (23), получим, что для функции $V^\tau(t,x,y)$ справедливо неравенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Y_2 \sup_{x \in E_n} |V^\tau(t,x,y)|\,dy \le C, \quad 0 \le t \le T. \tag{28}$$

Теперь, пользуясь результатом леммы 2 и повторяя рассуждения, приведенные при получении оценки (24), выводим, что

$$Y_{1+\varepsilon} \sup_{x,y \in E_{n+1}} \left|\frac{\partial v^\tau(t,x,y)}{\partial x_j}\right| \le C, \qquad 0 \le t \le T. \tag{29}$$

Дифференцируя задачу по x_j, затем по x_k, получим задачу вида (25)–(27), где

$$V^\tau(t,x,y) = v^\tau_{x_j x_k}(t,x,y),$$

$$\Phi(t,x,y) = 2\mathrm{Re}\Bigg(\gamma_{x_j} + a\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v^\tau_{x_j}\,dy - ib\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y v^\tau_{x_j}\,dy\Bigg)\big(f^{-1}(t,x,0)F(t,x,y)\big)_{x_j}$$
$$+\,\mathrm{Re}\Bigg(\gamma + a\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 v^\tau\,dy - ib\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y v^\tau\,dy\Bigg)\big(f^{-1}(t,x,0)F(t,x,y)\big)_{x_j x_k}.$$

Используя (5), (8), (23), нетрудно получить равномерную по τ оценку

$$Y_{1+\varepsilon}\sup_{x,y\in E_{n+1}}\left|\frac{\partial v^\tau(t,x,y)}{\partial x_j \partial x_k}\right| \le C, \quad 0\le t\le T. \tag{30}$$

Производные функции v^τ третьего порядка по x легко оцениваются равномерно по τ в $\widetilde{G}_{[0,T]}$ аналогичным образом после соответствующего дифференцирования задачи (9)–(11).

Таким образом, в $\widetilde{G}_{[0,T]}$ справедлива оценка

$$Y_{1+\varepsilon}\,|D^\alpha_x v^\tau| \le C, \quad |\alpha|\le 3. \tag{31}$$

Дифференцируя задачу (9)–(11) по x до второго порядка, а затем по y, всякий раз будем получать задачи вида (25)–(27). Учитывая уже полученные оценки, указанным выше способом нетрудно доказать, что в $\widetilde{G}_{[0,T]}$ равномерно по τ выполняется следующее неравенство

$$\left|\frac{\partial}{\partial y} D^\alpha_x v^\tau\right| \le C, \quad |\alpha|\le 2. \tag{32}$$

Из (31) и уравнений (9), (10) следует что

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} D^\alpha_x v^\tau\right| \le C, \quad |\alpha|\le 2. \tag{33}$$

Оценки (24), (31)–(33) гарантируют равномерную ограниченность и равностепенную непрерывность по τ семейства решений $\{v^\tau\}$ в $\widetilde{G}_{[0,T]}$ вместе с их производными по x до второго порядка включительно. Применяя теорему Арцела о компактности, диагональным методом можно выделить подпоследовательность $\{v^\tau\}$ (обозначения не меняем) решений, сходящуюся вместе со своими производными по x до второго порядка включительно к некоторой функции w в $\widetilde{G}_{[0,T]}$, причем равномерно на каждом компакте из $\widetilde{G}_{[0,T]}$. Данный факт позволяет доказать (см. доказательство теоремы 2.2 в [1]), что w — решение задачи (6)–(7).

Ясно, что $w \in C^{1,2}_{t,x} = \big\{f | D^\alpha_x f \in C(\widetilde{G}_{[0,T]}),\ |\alpha|\le 2, \frac{\partial f}{\partial t} \in C(\widetilde{G}_{[0,T]})\big\}$ и в $\widetilde{G}_{[0,T]}$ удовлетворяет соотношениям

$$(1+|y|^{3+\varepsilon})|w(t,x,y)| + (1+|y|^{1+\varepsilon})|w_t(t,x,y)|$$
$$+\,(1+|y|^{1+\varepsilon})|D^\alpha_x w(t,x,y)| \leqslant C, \quad |\alpha| = 1,2. \tag{34}$$

Нетрудно видеть, что функции $\{u(t,x,z),\ g(t,x)\}$, определяемые соотношениями

$$u(t,x,z) = \mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} w(t,x,y)e^{iyz}\,dy, \tag{35}$$

$$g(t,x)=\operatorname{Re}\left(\gamma+a\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y^2w\,dy-ib\int\limits_{-\infty}^{+\infty}yw\,dy\right)f^{-1}(t,x,0) \tag{36}$$

являются действительнозначным решением задачи (1)–(2). Для этого достаточно, учитывая (34), применить обратное преобразование Фурье к задаче (6), (7).

Покажем, что функция u удовлетворяет условию переопределения (3). Для этого рассмотрим уравнение (1) в точке $z=0$ и примем во внимание, что

$$\operatorname{Re}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y^2w\,dy=-\left.u_{zz}\right|_{z=0}, \quad \operatorname{Re}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}i\xi w\,dy=\left.u_z\right|_{z=0}.$$

Обозначая $\eta(t,x)=u(t,x,0)-\beta(t,x)$ и учитывая условия согласования (4), получаем, что функция $\eta(t,x)$ является решением задачи

$$\eta_t=L_x(\eta)+c\eta, \tag{37}$$

$$\eta(0,x)=0. \tag{38}$$

Очевидно, что задача (37)–(38) имеет единственное классическое решение $\eta(t,x)\equiv 0$.

Таким образом, мы показали, что любое решение задачи (6), (7), удовлетворяющее соотношениям (34), определяет решение задачи (1)–(3), которое дается формулами (35), (36).

Исследуем поведение решения задачи (2)–(3) при $t\to+\infty$. Для этого получим не зависящие от T оценки для решения задачи (6)–(7) в области $\widetilde{G}_{[0,T]}$.

Лемма 3. *Пусть в $\widetilde{G}_{[0,+\infty)}$ выполняются неравенства* (5), (8) *и имеет место соотношение*

$$-c(t)-\frac{2}{\delta}\big(|a(t)|+|b(t)|\big)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Y_2|F(t,x,y)|\,dy\geqslant d, \quad d=\mathrm{const}>0. \tag{39}$$

Тогда, если

$$\int\limits_{0}^{+\infty}|\gamma(t,x)|\,dt\leqslant C, \tag{40}$$

то для решения задачи (1)–(3) *в $G_{[0,+\infty)}$ справедливо неравенство*

$$|u(t,x,z)|+|u_z(t,x,z)|+|u_{zz}(t,x,z)|+|g(t,x)|\leqslant C. \tag{41}$$

Доказательство. Обратимся к расщепленной задаче (9)–(11). Рассмотрим задачу, решаемую на втором дробном шаге m-го целого шага, а именно, уравнение (10) в области $G^m=\{(t,x,y)|(m+\frac{1}{2})\tau<t\leqslant(m+1)\tau,\ x\in E_n\, y\in E_1\}$ с начальными данными

$$v^\tau\big((m+\tfrac{1}{2})\tau,x,y\big)=\widetilde{v}^\tau(x,y). \tag{42}$$

Здесь $\widetilde{v}^\tau(x,y)$ — значение функции $v^\tau(t,x,y)$, полученное на предыдущем дробном шаге при $t=(m+\frac{1}{2})\tau$.

В G^m имеет место (см. доказательство неравенства (17)) соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t}|v^\tau|+y^2|a||v^\tau|-2c|v^\tau|\leq\frac{4|F|}{\delta}\left(|a|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y^2|v^\tau|\,dy+|b|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|y||v^\tau|\,dy+|\gamma|\right). \tag{43}$$

Умножив неравенство (43) на Y_2 и проинтегрировав его по y от $-\infty$ до $+\infty$, а затем по t от $(m+\frac{1}{2})\tau$ до t, $t \in ((m+\frac{1}{2})\tau, (m+1)\tau]$, получаем неравенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2|v^\tau|\,dy + \int\limits_{(m+\frac{1}{2})\tau}^{t} |a| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_4|v^\tau|\,dyd\tau - 2 \int\limits_{(m+\frac{1}{2})\tau}^{t} c \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2|v^\tau|\,dy\,d\tau$$
$$\le \frac{4}{\delta} \int\limits_{(m+\frac{1}{2})\tau}^{t} \left(|a| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2|F|\,dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2|v^\tau|\,dy \right) d\tau$$
$$+ \frac{4}{\delta} \int\limits_{(m+\frac{1}{2})\tau}^{t} \left(|b| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2|F|\,dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2|v^\tau|\,dy \right) d\tau$$
$$+ \frac{4}{\delta} \int\limits_{(m+\frac{1}{2})\tau}^{t} \left(|\gamma| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2|F|\,dy \right) d\tau + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2|\widetilde{v}^\tau|\,dy. \qquad (44)$$

Учитывая (5), (8), (39), последнее неравенство можно записать в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2|v^\tau|\,dy \le C \int\limits_{(m+\frac{1}{2})\tau}^{t} \Gamma(\eta)\,d\eta + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2|\widetilde{v}^\tau|\,dy, \qquad (45)$$

где $\Gamma(t) = \sup\limits_{x\in E_n} |\gamma(t,x)|$.

Вернемся к расщепленной задаче (9)–(11). Рассмотрим нулевой целый шаг ($m = 0$).

Из принципа максимума следует, что на первом дробном шаге выполнено неравенство

$$\|V^\tau(t)\| \leqslant \|V_0\|, \quad 0 < t \leqslant \tfrac{\tau}{2}.$$

Здесь

$$\|V^\tau(t)\| = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2 \sup_{x\in E_n} |v^\tau|\,dy, \quad \|V_0\| = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2 \sup_{x\in E_n} |v_0|\,dy. \qquad (46)$$

Тогда, используя (45), на втором дробном шаге получаем

$$\|V^\tau(t)\| \leqslant C \int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} \Gamma(\eta)\,d\eta + \|V_0\|, \quad \tfrac{\tau}{2} < t \leqslant \tau.$$

Рассмотрим следующий целый шаг ($m = 1$). Из принципа максимума следует, что на первом дробном шаге выполнено неравенство

$$\|V^\tau(t)\| \leqslant \|V^\tau(\tau)\| \leqslant C \int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} \Gamma(\eta)\,d\eta + \|V_0\|, \quad \tau < t \leqslant \tfrac{3\tau}{2}.$$

Отсюда и из (45) получаем, что на втором дробном шаге первого целого шага справедливо неравенство

$$\|V^\tau(t)\| \leqslant C \int\limits_{\frac{3\tau}{2}}^{2\tau} \Gamma(\eta)\,d\eta + C \int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} \Gamma(\eta)\,d\eta + \|V_0\|, \quad \tfrac{3\tau}{2} < t \leqslant 2\tau.$$

Продолжая рассуждения, на втором дробном шаге второго целого шага получаем оценку

$$\|V^\tau(t)\| \leqslant C\int\limits_{\frac{5\tau}{2}}^{3\tau}\Gamma(\eta)\,d\eta + C\int\limits_{\frac{3\tau}{2}}^{2\tau}\Gamma(\eta)\,d\eta + C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\tau}\Gamma(\eta)\,d\eta + \|V_0\|\,, \quad \tfrac{5\tau}{2} < t \leqslant 3\tau.$$

Рассматривая последующие шаги, нетрудно убедиться, что на m-ом шаге $(m = 0, 1, 2, \ldots, N-1)$

$$\|V^\tau(t)\| \leqslant C\sum_{k=0}^{m}\int\limits_{(k+\frac12)\tau}^{(k+1)\tau}\Gamma(\eta)\,d\eta + \|V_0\| \leqslant C\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{(k+\frac12)\tau}^{(k+1)\tau}\Gamma(\eta)\,d\eta + \|V_0\|$$

$$\leqslant C\int\limits_{0}^{+\infty}\Gamma(\eta)\,d\eta + \|V_0\|\,, \quad m\tau < t \leqslant (m+1)\tau.$$

Отсюда и из (40) следует, что равномерно по τ

$$\|V^\tau(t)\| \leqslant C, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{47}$$

Так как при любом фиксированном $T > 0$ при $\tau \to 0$ имеет место равномерная в $\widetilde{G}_{[0,T]}$ сходимость последовательности решений $v^{\tau_k}(t,x,y)$ задачи (9)–(11) к решению $v(t,x,y)$ задачи (6)–(7) вместе со всеми производными по x до второго порядка включительно, то можно доказать неравенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2 \sup_{x\in E_n}|v(t,x,y)|\,dy \le C, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{48}$$

Заметим, что неравенство (48) справедливо для любого фиксированного $T > 0$. Последняя оценка гарантирует, что для функций $u(t,x,z)$, $g(t,x)$, которые являются решением задачи (1)–(3) и связаны с решением задачи (6)–(7) формулами (35)–(36), справедливо неравенство (41). Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть в* $\widetilde{G}_{[0,+\infty)}$ *выполняются условия* (5), (8), (39) *и справедливо неравенство*

$$|\Gamma(t)| \leqslant \frac{1}{1+t^p}, \quad p = \mathrm{const} > 1. \tag{49}$$

Тогда для решения задачи (1)–(3) *имеет место соотношение*

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\sum_{j=0}^{2}\sup_{(x,z)\in E_{n+1}}\left|\frac{\partial^j}{\partial z^j}u(t,x,z)\right| + \sup_{x\in E_n}|g(t,x)|\right) = 0. \tag{50}$$

Доказательство. Рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 3, получим, что для задачи, решаемой на втором дробном шаге m-го целого шага, т. е. для уравнения (10) в области $G^m = \{(t,x,y)|(m+\frac12)\tau < t \leqslant (m+1)\tau,\ x\in E_n\ y \in E_1\}$ с начальными данными (42), выполнено неравенство (43).

Умножим (43) на Y_2 и проинтегрируем по y от $-\infty$ до $+\infty$. Учитывая (5), (8), (39), результат можно записать в следующем виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2|v^\tau|\,dy + d\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2|v^\tau|\,dy \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2|\gamma||F|\,dy. \tag{51}$$

Умножая теперь (51) на $e^{d(t-(m+\frac{1}{2})\tau)}$, получаем неравенство

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{d(t-(m+\frac{1}{2})\tau)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2|v^\tau|\,dy\right) \leq e^{d(t-(m+\frac{1}{2})\tau)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2|\gamma||F|\,dy.$$

Проинтегрировав последнее неравенство по t на интервале от $\big(m+\frac{1}{2}\big)\tau$ до t, где $t \in ((m+\frac{1}{2})\tau, (m+1)\tau]$, и разрешив результат интегрирования относительно $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2|v^\tau|\,dy$, имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2|v^\tau|\,dy \leq e^{-d(t-(m+\frac{1}{2})\tau)}\int\limits_{(m+\frac{1}{2})\tau}^{t} e^{d(\eta-(m+\frac{1}{2})\tau)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2|\gamma||F|\,dy\,d\eta$$

$$+\,e^{-d(t-(m+\frac{1}{2})\tau)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2\widetilde{v^\tau}\,dy \leq \int\limits_{(m+\frac{1}{2})\tau}^{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2|\gamma||F|\,dy + e^{-d(t-(m+\frac{1}{2})\tau)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2\widetilde{v^\tau}\,dy.$$

С учетом (8) выводим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2|v^\tau|\,dy \leq C\int\limits_{(m+\frac{1}{2})\tau}^{t} |\gamma|\,d\eta + e^{-d(t-(m+\frac{1}{2})\tau)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Y_2\widetilde{v^\tau}\,dy. \tag{52}$$

Рассматривая расщепленную задачу и рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 3, учитывая при этом (52), получим, что на нулевом целом шаге выполнены неравенства

$$\|V^\tau(t)\| \leqslant \|V_0\|, \quad 0 < t \leqslant \tfrac{\tau}{2},$$

$$\|V^\tau(t)\| \leqslant C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t}\Gamma(\eta)\,d\eta + e^{-d(t-\frac{\tau}{2})}\|V_0\|, \quad \tfrac{\tau}{2} < t \leqslant \tau.$$

Полагая в последнем неравенстве $t=\tau$, имеем неравенство

$$\|V^\tau(\tau)\| \leqslant C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\tau}\Gamma(\eta)\,d\eta + e^{-d\tau}\|V_0\|.$$

На первом целом шаге нетрудно получить следующие оценки

$$\|V^\tau(t)\| \leqslant \|V(\tau)\| \leqslant C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\tau}\Gamma(\eta)\,d\eta + e^{-d\tau}\|V_0\|, \quad \tau < t \leqslant \tfrac{3\tau}{2},$$

$$\|V^\tau(t)\| \leqslant C\int\limits_{\frac{3\tau}{2}}^{t}\Gamma(\eta)\,d\eta + e^{-2d(t-\frac{3\tau}{2})}\left(C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\tau}\Gamma(\eta)\,d\eta + e^{-d\tau}\|V_0\|\right), \quad \tfrac{3\tau}{2} < t \leqslant 2\tau.$$

Положив в последнем неравенстве $t=2\tau$, выводим

$$\|V^\tau(2\tau)\| \leqslant C\int\limits_{\frac{3\tau}{2}}^{2\tau}\Gamma(\eta)\,d\eta + Ce^{-d\tau}\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{\tau}\Gamma(\eta)\,d\eta + e^{-2d\tau}\|V_0\|.$$

Продолжая рассуждения, нетрудно убедиться, что на втором дробном шаге m-го целого шага ($m = 0, 1, 2, \dots, N-1$) выполнено неравенство

$$\|V^\tau(t)\| \leqslant C \int\limits_{\left(m+\frac{1}{2}\right)\tau}^{t} \Gamma(\eta)\, d\eta + e^{-d\left(t-\left(m+\frac{1}{2}\right)\tau\right)} \Big(\phi_{m-1} + \phi_{m-2}e^{-d\tau}$$

$$+ \phi_{m-3}e^{-2d\tau} + \dots + \phi_1 e^{-(m-2)d\tau} + \phi_0 e^{-(m-1)d\tau} + e^{-nd\tau}\|V_0\|\Big),$$

$$\left(m+\tfrac{1}{2}\right)\tau < t \leqslant (m+1)\tau. \quad (53)$$

Здесь $\phi_m = C \int\limits_{(m+\frac{1}{2})\tau}^{(m+1)\tau} \Gamma(\eta)\, d\eta.$

Усилив (53), получим, что для $t \in \left(\left(m+\frac{1}{2}\right)\tau, (m+1)\tau\right]$ выполнено неравенство

$$\|V^\tau(t)\| \leqslant \phi_m + \phi_{m-1} + \phi_{m-2}e^{-d\tau} + \phi_{m-3}e^{-2d\tau} + \dots$$
$$+ \phi_1 e^{-(m-2)d\tau} + \phi_0 e^{-(m-1)d\tau} + e^{-nd\tau}\|V_0\|. \quad (54)$$

Применяя теорему о среднем и учитывая (49), можно показать, что для ϕ_m справедлива оценка

$$\phi_m \leqslant \frac{C\tau}{1+(m\tau)^p}.$$

Перепишем (54) с учетом полученной оценки, выделяя первые $[\frac{m}{2}]$ членов суммы. Здесь $[\frac{m}{2}]$ — целая часть от деления m на 2.

$$\|V^\tau(t)\| \leqslant C\tau \Bigg(\frac{1}{1+\left(m\tau\right)^p} + \frac{1}{1+\left((m-1)\tau\right)^p} + \dots$$
$$+ \frac{e^{-d\left([\frac{m}{2}]-1\right)\tau}}{1+\left((m-[\frac{m}{2}])\tau\right)^p} + \frac{e^{-d[\frac{m}{2}]\tau}}{1+\left((m-[\frac{m}{2}]-1)\tau\right)^p} + \dots$$
$$+ \frac{e^{-d(m-2)\tau}}{1+\tau^p} + e^{-d(m-1)\tau}\Bigg) + e^{-dn\tau}\|W_0^\tau\|$$
$$\leqslant C\frac{\tau\left([\frac{m}{2}]+1\right)}{1+\left((m-[\frac{m}{2}])\tau\right)^p} + \tau[\tfrac{m}{2}]e^{-d[\frac{m}{2}]\tau} + e^{-dn\tau}\|V_0\|. \quad (55)$$

Нетрудно видеть, что на втором дробном шаге N-го шага, т. е. для $t \in \left(T - \frac{\tau}{2}, T\right]$, выполнено неравенство

$$\|V^\tau(t)\| \leqslant C\frac{\frac{T}{2}+\tau}{1+(\frac{T}{2}-\tau)^p} + \tfrac{T}{2}e^{-d\left(\frac{T}{2}-\tau\right)} + e^{-d(T-\tau)}\|V_0\|. \quad (56)$$

Очевидно, что выражение, стоящее справа, стремится к нулю при $T \to +\infty$, откуда следует, что $V^\tau(T) \to 0$ при $T \to +\infty$.

Так как при любом фиксированном $T > 0$ при $\tau \to 0$ имеет место равномерная в $\widetilde{G}_{[0,T]}$ сходимость последовательности решений $v^{\tau_k}(t,x,y)$ задачи (9)–(11) к решению $v(t,x,y)$ задачи (6)–(7) вместе со всеми производными по x до второго порядка включительно, то

$$V(T) \xrightarrow[T\to+\infty]{} 0. \quad (57)$$

Так как функции $u(t,x,z)$, $g(t,x)$, являющиеся решением задачи (1)–(3), связаны с решением $v(t,x,y)$ задачи (6)–(7) формулами (35)–(36), то из (57) получаем утверждение леммы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Belov Yu. Ya.* Inverse Problems for Partial Differential Equations. Utrecht: VSP, 2002. 211 p.

2. *Шипина Т. Н.* Некоторые обратные задачи с данными Коши. Дис. … канд. физ.-мат. наук. Красноярск, 1999. 90 с.

Сорокин Роман Викторович
Россия, Красноярск, Сибирский федеральный университет
rsor@mail.ru