Неклассические уравнения математической физики
2007. С. 244–250

УДК 517.9

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ БАРЕНБЛАТТА — ЖЕЛТОВА — КОЧИНОЙ НА ГРАФЕ

Г. А. Свиридюк, А. А. Баязитова

Для уравнений Баренблатта – Желтова – Кочиной, заданных на конечном связном ориентированном графе с условиями непрерывности и баланса потока в вершинах, рассмотрена обратная задача с “начально-конечным” условием. Показано существование единственного решения этой задачи.

Уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной

$$(\lambda - \Delta)p_t = \alpha\Delta p + g \tag{1}$$

моделирует динамику давления жидкости, фильтрующейся в трещинновато-пористой среде; процесс влагопереноса в почве и процесс теплопроводности в среде с “двумя температурами”. Уравнение (1) относится к уравнениям соболевского типа, которые составляют обширную область неклассических уравнений математической физики. Уравнение (1), определенное в ограниченной области пространства $\mathbb{R}^n$, изучалось в различных аспектах (см. например [1], где описаны фазовые пространства уравнения (1) при различных краевых условиях, изучены дихотомии его решений, исследованы задачи оптимального управления для него и т. д.). Впервые уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной на графе рассмотрены в [2], где описано их фазовое пространство.

Наша цель — изучение обратной задачи [3] для уравнений

$$\lambda u_{jt} - u_{jtxx} = \alpha u_{jxx} + f_j\varphi, \tag{2}$$

заданных на конечном связном ориентированном графе $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V};\mathfrak{E})$, где $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ — множество вершин, а $\mathfrak{E} = \{E_j\}$ — множество ребер; причем мы предполагаем, что каждое ребро E_j имеет длину $l_j \in \mathbb{R}_+$ и площадь поперечного сечения $d_j \in \mathbb{R}_+$. (Здесь $u = (u_1, u_2, \ldots, u_j, \ldots)$, $u_j = u_j(x,t)$ и $f = (f_1, f_2, \ldots, f_j, \ldots)$, $f_j = f_j(x)$ — искомые вектор-функции, $\varphi = \varphi(t)$ — заданная функция, параметры $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ характеризуют свойства среды). Кроме того мы предполагаем, что каждое решение $u = (u_1, u_2, \ldots, u_j, \ldots)$ удовлетворяет “условию непрерывности”

$$\begin{gathered} u_j(0,t) = u_k(0,t) = u_m(l_m,t) = u_n(l_n,t), \\ E_j, E_k \in E^\alpha(V_i), E_m, E_k \in E^\omega(V_i); \end{gathered} \tag{3}$$

и “условию баланса потока”

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j u_{jx}(0,t) - \sum_{E_k \in E^\omega(V_i)} d_k u_{kx}(l_k,t) = 0, \tag{4}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства Челябинской области, проект урчел_07_01_96057

где через $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначено множество ребер с началом (концом) в вершине V_i. Заметим, что в условиях (3), (4) термин "отсутстовать" не означает "быть равным нулю". Например, если граф состоит из одного нециклического ребра, то условия (3) отсутствуют, а условия (4) превращаются в однородные условия Неймана. Если же это ребро циклическое, то условия (3), (4) превращаются в условия согласования. Заметим ещё, что дифференциальные уравнения на графах начали рассматриваться сравнительно недавно (см. обзор состояния в монографии [4]), что же касается уравнений соболевского типа на графах, то впервые они были рассмотрены в [5]. (Кстати, в [6] содержатся описания фазовых пространств многих уравнений соболевского типа на графах). Обратные задачи для уравнений соболевского типа впервые рассмотрены в [7]. Частный случай обратной задачи [3] для уравнения (1), заданного в области, рассмотрен в [8].

Статья организована следующим образом. В п. 1 содержится исследование разрешимости обратной задачи для абстрактного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + f\varphi(t), \tag{5}$$

а в п. 2 проводится редукция конкретной задачи (2)–(4) к уравнению (5) и рассматривается соответствующая обратная задача.

1. Абстрактная схема

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, операторы $L,M \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$ (т. е. линейны и непрерывны).

Для линейного неоднородного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + f\varphi(t) \tag{6}$$

рассмотрим следующую "начально-конечную" задачу

$$u(0) = u(T) = v, \tag{7}$$

где число $T \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ и вектор $v \in \mathfrak{U}$ произвольны, а функция $\varphi : I \to \mathbb{R}$ — задана (I — отрезок с концами в точках 0 и T). Пару (u, f) назовем решением задачи (6), (7), если вектор-функция $u \in C^1(\overset{\circ}{I};\mathfrak{U}) \cap C(I;\mathfrak{U})$ и вектор $g \in \mathfrak{F}$ удовлетворяют уравнению (6) и соотношениям (7) (через $\overset{\circ}{I}$ обозначена внутренность (интервал) отрезка I).

Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, тогда в силу теоремы о расщеплении [1], гл. 4, пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ расщепляются в прямые суммы $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$, причем действия операторов L и M тоже расщепляются L_k, $M_k \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k)$, где через L_k, M_k обозначены сужения операторов L, M на подпространства $\mathfrak{U}^k, k = 0, 1$. Кроме того существуют операторы $M_0^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$ и $L_1^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$, поэтому если функция $\varphi \in C^p(I;\mathbb{R})$, то можно построить множество

$$\mathfrak{P} = \{u \in \mathfrak{U} : (\mathbb{I} - P)u = -\sum_{q=0}^{p} H^q \varphi^{(q)}(0) M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)f\},$$

где $P : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}^1$ $(Q : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}^1)$ — проектор вдоль $\mathfrak{U}^0(\mathfrak{F}^0)$, а оператор $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U}^0)$ нильпотентен степени p.

Теорема 1 (см. [1, гл. 4]). *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, а функция $\varphi \in C^{p+1}(\overset{\circ}{I};\mathbb{R}) \cap C^p(I;\mathbb{R})$, тогда при любых $f \in \mathfrak{F}$ и $v \in \mathfrak{P}$ существует*

единственное решение $u \in C^1(\mathbb{R};\mathfrak{U})$ *задачи Коши* $u(0) = v$ *для уравнения* (6), *которое к тому же имеет вид*

$$u(t) = -\sum_{q=0}^{p} H^q \varphi^{(q)}(t) M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)f + U^t v + \int_0^t R^{t-s}\varphi(s)dsQf. \tag{8}$$

Здесь

$$U^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\mu L - M)^{-1} L e^{\mu t} d\mu$$

— разрешающая аналитическая группа однородного (т. е. $f = 0$) уравнения (6), а оператор

$$R^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\mu L - M)^{-1} e^{\mu t} d\mu,$$

причем замкнутый контур γ является границей области, содержащей L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M.

Подействуем на (8) оператором $(\mathbb{I} - P)$

$$(\mathbb{I} - P)u(t) = -(\sum_{q=0}^{p} H^q \varphi^{(q)}(t) M_0^{-1})(\mathbb{I} - Q)f. \tag{9}$$

Выбрав $T \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ и подставив начальные значения $u(0) = u(T) = v$ в (9), имеем

$$(\mathbb{I} - P)v = -\sum_{q=0}^{p} H^q \varphi^{(q)}(0) M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)f, \tag{10}$$

$$(\mathbb{I} - P)v = -\sum_{q=0}^{p} H^q \varphi^{(q)}(T) M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)f. \tag{11}$$

Лемма 1. *Пусть оператор* M (L,p)*-ограничен,* $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$*, а функция* $\varphi \in C^p(I;\mathbb{R})$*. Тогда равенства* $\varphi^{(q)}(0) = \varphi^{(q)}(T)$, $q = 0, 1, \ldots, p$ *являются необходимым условием однозначной разрешимости уравнения* (6), (7).

Действительно, пусть (u, f) — единственное решение задачи (6), (7), тогда для того, чтобы удовлетворить равенствам (7), u и f должны быть связаны формулами (10), (11). Отсюда находим, что

$$\sum_{q=0}^{p} H^q \varphi^{(q)}(0) = \sum_{q=0}^{p} H^q \varphi^{(q)}(T).$$

Учитывая линейную независимость операторов $\mathbb{I}, H, \ldots, H^p$, получим требуемое.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы* 1. *Тогда неравенство* $\varphi(0) \neq 0$ *является необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости обратной задачи* (6), (7).

Пусть $\varphi(0) \neq 0$, тогда из $v \in \mathfrak{P}$ вытекает, что

$$(P - \mathbb{I})v = \varphi(0)\left(\mathbb{I} + \frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)}H + \cdots + \frac{\varphi^{(p)}(0)}{\varphi(0)}H^p\right)M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)f. \tag{12}$$

Далее, оператор

$$N = \frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)} H + \cdots + \frac{\varphi^{(p)}(0)}{\varphi(0)} H^p$$

нильпотентен степени p, поэтому из (12) вытекает, что

$$(\mathbb{I} - Q)f = \left[\sum_{q=0}^{p} H^q \varphi^{(q)}(0) M_0^{-1} \right]^{-1} (P - \mathbb{I})v. \tag{13}$$

Отсюда вытекает однозначность определения проекции вектора f на подпространство $\mathfrak{F}^0$. Если же $\varphi(0) = 0$, то в силу нильпотентности оператора $\sum\limits_{q=0}^{p} H^q \varphi^{(q)}(0)$ однозначность этой проекции невозможна.

Теперь подействуем на (8) проектором P, получим

$$Pu(t) = U^t v + \int_0^t R^{t-s} \varphi(s) ds Qf.$$

Отсюда при $t = T$ и равенстве $R^{t-s} = U^t R^{-s}$ имеем

$$Pv = U^T v + U^T \int_0^T R^{-s} \varphi(s) ds Qf.$$

Обращая оператор U^T, получим

$$(U^{-T} - P)v = \int_0^T R^{-s} \varphi(s) ds Qf. \tag{14}$$

Теорема 2. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$; $T \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$; функция $\varphi \in C^{p+1}(\mathring{I}; \mathbb{R}) \cap C^p(I; \mathbb{R}))$ такова, что $\varphi^{(q)}(0) = \varphi^{(q)}(T)$, $q = 0, 1, \ldots, p$, причем $\varphi(0) \neq 0$; оператор $S^T \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$, равный сужению оператора*

$$\int_0^T R^{-s} \varphi(s) ds$$

на $\mathfrak{F}^1$ непрерывно обратим. Тогда при любом $v \in \mathfrak{U}$ существует единственное решение (u, f) обратной задачи (6), (7).

Действительно, в силу $\varphi(0) \neq 0$ и непрерывной обратимости оператора S^T из (13) и (14) при любом $v \in \mathfrak{U}$ найдем единственный вектор f. Подставим v и f в (8), найдем единственное решение $u \in C^1(\mathring{I}; \mathfrak{U}) \cap C(I; \mathfrak{U}))$ уравнения (6), которое удовлетворяет условию $u(0) = v$. Проверим выполнение условия $u(T) = v$. Для этого подставив T в (8), получим

$$(\mathbb{I} - P)u(T) = \sum_{q=0}^{p} H^q \varphi^{(q)}(T) M_0^{-1} (Q - \mathbb{I})f = \sum_{q=0}^{p} H^q \varphi^{(q)}(0) M_0^{-1} (Q - \mathbb{I})f = (\mathbb{I} - P)v$$

в силу равенств $\varphi^{(q)}(0) = \varphi^{(q)}(T)$, $q = 0, 1, \ldots, p$ и включения $v \in \mathfrak{P}$. Далее

$$Pu(T) = U^T v + \int_0^T R^{T-s} \varphi(s) ds Qf = Pv$$

в силу (14) и непрерывной обратимости оператора S^T. Теорема доказана.

В заключение рассмотрим важный случай $(L,0)$-ограниченности оператора M, причем в этот случай входит ситуация, когда существует оператор $L^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Итак, пусть существует оператор $L^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, тогда оператор M $(L,0)$-ограничен, причем условия на функцию φ можно существенно упростить. Именно, имеет место следующее

Следствие 1. *Пусть существует оператор $L^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})$, тогда при любых $T \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $v \in \mathfrak{U}$, α и $\varphi \in C(I;\mathbb{R})$ такой, что оператор S^T непрерывно обратим, существует единственное решение $(u;f)$ задачи* (6), (7).

Действительно, в данном случае проекторы $P = \mathbb{I}$, $Q = \mathbb{I}$, поэтому решение искомой задачи имеет вид

$$u(t) = U^t v + \int\limits_0^t R^{t-s}\varphi(s)ds f,$$

где f в силу (14) находится по формуле

$$(S^T)^{-1}(U^{-T} - \mathbb{I})v = f.$$

Теперь рассмотрим случай $(L,0)$-ограниченного оператора, но оператор L уже не будет обратимым. В этом случае справедлив частный случай теоремы 2.

Следствие 2. *Пусть оператор M $(L,0)$-ограничен, $T \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, функция $\varphi \in C^1(\mathring{I};\mathfrak{U}) \cap C(I;\mathfrak{U}))$ такова, что $\varphi(0) = \varphi(T) \neq 0$, а оператор S^T непрерывно обратим. Тогда при любом $v \in \mathfrak{U}$ существует единственное решение (u,f) задачи* (6), (7).

Действительно, в силу теоремы 2 искомое решение имеет вид

$$u(t) = \varphi(t)M_0^{-1}(Q-\mathbb{I})f + U^t v + \int\limits_0^t R^{t-s}\varphi(s)dsQf,$$

где

$$(Q-\mathbb{I})f = \frac{1}{\varphi(0)}M_0(\mathbb{I}-P)v, \quad \text{а} \quad Qf = (S^T)^{-1}(U^{-T} - P)v.$$

Итак, редукция задачи (2)–(4) к уравнению (6) закончена. Для уравнения (6) в данной конкретной интерпретации рассмотрим задачу (7).

2. Конкретная интерпретация

Построим гильбертовы пространства $\mathbf{L_2(G)} = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots) : g_j \in L_2(0,l_j)\}$ и $\mathfrak{U} = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_j, \dots) : u_j \in W_2^1(0,l_j),$ и выполнено условие $(3)\}$ со скалярными произведениями

$$\langle g,h\rangle = \sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} g_j h_j dx \quad \text{и} \quad [u,v] = \sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} (u_{jx}v_{jx} + u_j v_j)dx$$

соответственно. В силу теорем вложения Соболева пространство $W_2^1(0,l_j)$ состоит из абсолютно непрерывных функций, а значит пространство $\mathfrak{U}$ корректно

определено, плотно и компактно вложено в $\mathbf{L_2}(\mathbf{G})$. Отождествим $\mathbf{L_2}(\mathbf{G})$ со своим сопряженным, и через $\mathfrak{F}$ обозначим сопряженное относительно двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$ пространство к $\mathfrak{U}$. Очевидно, $\mathfrak{F}$ — гильбертово пространство, причем вложение $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$ компактно.

Формулами

$$\langle Lu, v\rangle = \sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} (u_{jx}v_{jx} + \lambda u_j v_j)dx, \quad \langle Mu, v\rangle = -\alpha \sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} u_{jx}v_{jx}dx$$

зададим операторы $L, M : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$. Очевидно, $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т.е. линейны и непрерывны), причем справедлива

Лемма 3 (см. [2, 6]). *При любых $\lambda \in \mathbb{R}$ спектр $\sigma(L)$ вещественен дискретен конечнократен и сгущается только к $+\infty$.*

Обозначим через $\{\lambda_k\}$ собственные значения оператора L, занумерованные по неубыванию с учетом их кратности, а через $\{\psi_k\}$ – соответствующее семейство ортонормированных (в смысле $\mathbf{L_2}(\mathbf{G})$) собственных функций.

Лемма 4 (см. [2, 6]). *При любых α, $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ оператор M $(L, 0)$–ограничен, причем L-спектр оператора M*

$$\sigma^L(M) = \left\{\mu_k = \frac{\alpha(\lambda_k - \lambda)}{\lambda_k} : \lambda_k \neq 0\right\}.$$

В силу $(L, 0)$-ограниченности оператора M можно построить операторы

$$P = \begin{cases} \mathbb{I}, 0 \notin \sigma(L); \\ \mathbb{I} - \sum\limits_{\lambda_k=0} \langle\cdot,\psi_k\rangle\psi_k, 0 \in \sigma(L) \end{cases}; \quad Q = \begin{cases} \mathbb{I}, 0 \notin \sigma(L); \\ \mathbb{I} - \sum\limits_{\lambda_k=0} \langle\cdot,\psi_k\rangle\psi_k, 0 \in \sigma(L) \end{cases}$$

(заметим, что несмотря на “похожесть” проекторы P и Q определены на разных пространствах), разрешающую группу и оператор R^t

$$U^t = {\sum_{k=1}^{\infty}}' e^{\mu_k t}\langle\cdot,\psi_k\rangle\psi_k, \quad R^t = {\sum_{k=1}^{\infty}}' e^{\mu_k t}\lambda_k^{-1}\langle\cdot,\psi_k\rangle\psi_k,$$

где штрих у знака суммы означает отсутствие слагаемых с индексами k такими, что $\lambda_k = 0$. Далее выберем $T \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, через I обозначим отрезок с концами в точках 0 и T. В силу следствий 1 и 2 справедлива

Теорема 3. *Пусть $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ и*

(i) $0 \notin \sigma(L)$. *Тогда при любом векторе $v \in \mathfrak{U}$ и любой функции $\varphi \in C(I;\mathbb{R})$ такой, что*

$$a_k = \int\limits_0^T e^{-\mu_k s}\varphi(s)ds \neq 0 \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

существует единственное решение (u, f) обратной задачи, причем

$$\langle f, \psi_k\rangle = (e^{-\mu_k T} - 1)a_k^{-1}\lambda_k\langle v, \psi_k\rangle,$$

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\mu_k t}\langle v, \psi_k\rangle\psi_k + \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_0^T e^{\mu_k(t-s)}\varphi(s)ds\lambda_k^{-1}\langle f, \psi_k\rangle\psi_k.$$

(ii) $0 \in \sigma(L)$. *Тогда любой функции* $\varphi \in C^1(\mathring{I};\mathbb{R}) \cap C(I;\mathbb{R})$ *такой, что*

$$\varphi(0) = \varphi(T) \neq 0 \quad \text{и} \quad a_k = \int\limits_0^T e^{-\mu_k s}\varphi(s)ds \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}\backslash\{l : \lambda_l = 0\},$$

и при любом векторе $v \in \mathfrak{U}$ *существует единственное решение* (u, f) *обратной задачи, причем*

$$\langle f, \psi_k\rangle = (e^{-\mu_k T} - 1)a_k^{-1}\lambda_k\langle v, \psi_k\rangle \quad \forall k \in \mathbb{N}\backslash\{l : \lambda_l = 0\},$$

$$\langle f, \psi_k\rangle = \frac{\alpha\lambda}{\varphi(0)}\langle v, \psi_k\rangle \quad \forall k \in \mathbb{N} : \lambda_k = 0,$$

$$u(t) = \sum_{\lambda_k=0}\frac{\varphi(t)}{\alpha\lambda}\langle f, \psi_k\rangle\psi_k + {\sum_{k=1}^{\infty}}' e^{\mu_k t}\langle v, \psi_k\rangle\psi_k + {\sum_{k=1}^{\infty}}' \int\limits_0^T e^{\mu_k(t-s)}\varphi(s)ds\lambda_k^{-1}\langle f, \psi_k\rangle\psi_k.$$

В заключение авторы считают своим приятным долгом поблагодарить профессоров А. И. Кожанова, В. Е. Федорова за строгую, но конструктивную критику, в немалой степени способствующую улучшению статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht; Boston: VSP, 2003.
2. *Свиридюк Г. А., Шеметова В. В.* Уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной на графе // Вестн. МаГУ. Сер. Математика. Магнитогорск: МаГУ, 2003. Вып. 4. С. 129 – 139.
3. *Abasheeva N. L.* Some inverse problems for parabolic equations with changing time direction // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2004. V. 12, N 4., P. 337 – 348.
4. *Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л. и др.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит, 2004. 272 с.
5. *Свиридюк Г. А.* Уравнения соболевского типа на графах // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2002. С. 221–225.
6. *Шеметова В. В.* Исследование одного класса уравнений Соболевского типа на графах. Дис. . . . канд. Физ.-мат. наук. Иркутск, 2005.
7. *Fedorov V. E., Urazaeva A.V.* An inverse problem for linear Sobolev type equations // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2004. V. 12, N 5. P. 1–9.
8. *Свиридюк Г. А., Ощепков К. С.* О существовании решений одной обратной задачи// Вестн. МаГУ. Сер. Математика. Магнитогорск: МаГУ, 2005. Вып. 8. С. 168–172.

Свиридюк Георгий Анатольевич
Россия, Челябинск, Южно-Уральский государственный университет
`ridyu@math.susu.ac.ru`

Баязитова Альфия Адыгамовна
Россия, Челябинск, Южно-Уральский государственный университет
`alfiya@74.ru`