Неклассические уравнения математической физики
2007. С. 273–282

УДК 517.956.22

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА

Н. Е. Товмасян, А. О. Бабаян

В работе исследуются граничные задачи для эллиптического уравнения второго порядка в полупространстве в классе функций полиномиального роста. Получены условия, при которых задача Дирихле нетерова и получена явная формула решения. Далее, для задачи Коши с полиномиальными данными Коши доказывается существование и единственность решения в классе функций полиномиального роста.

1. Постановка задачи и формулировка результатов

Рассмотрим эллиптическое уравнение второго порядка с действительными постоянными коэффициентами в полупространстве $\mathbf{R}^3_+ = \{(x,y,t)|t > 0, (x,y) \in \mathbf{R}^2\}$. Как известно, при помощи линейного невырожденного преобразования неизвестных такое уравнение приводится к уравнению

$$L(u) \equiv u_{tt} + u_{xx} + u_{yy} - 2au_t - 2bu_x + cu = 0, \quad (x,y,t) \in \mathbf{R}^3_+, \tag{1}$$

где a, b, c — действительные постоянные. В дальнейшем будем обозначать $\overline{\mathbf{R}^3_+} = \{(x,y,t)|t \geq 0, (x,y) \in \mathbf{R}^2\}$.

Пусть $\alpha \geq 0$ — фиксированное число.

Определение 1. Класс $Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}^3_+})$ состоит из функций $u \in C(\overline{\mathbf{R}^3_+}) \bigcap C^2(\mathbf{R}^3_+)$, удовлетворяющих на бесконечности оценке

$$|u(x,y,t)| \leq K(1 + x^2 + y^2)^{0,5\alpha}(1+t)^\beta, \quad (x,y,t) \in \overline{\mathbf{R}^3_+}, \tag{2}$$

где K и β некоторые положительные постоянные, вообще говоря, зависящие от u. Аналогично определяется класс функций $M_\alpha(\overline{\mathbf{R}^3_+})$ с той лишь разницей, что неравенство (2) заменяется неравенством

$$|u(x,y,t)| \leq K(1 + x^2 + y^2 + t^2)^{0,5\alpha}, \quad (x,y,t) \in \overline{\mathbf{R}^3_+}.$$

Очевидно, что $M_\alpha(\overline{\mathbf{R}^3_+}) \subset Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}^3_+})$.

Определение 2. Класс $Q_\alpha(\mathbf{R}^2)$ состоит из функций f, принадлежащих множеству $C(\mathbf{R}^2)$ и удовлетворяющих на бесконечности оценке

$$|f(x,y)| \leq K_1(1 + x^2 + y^2)^{0,5\alpha}, \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2, \tag{3}$$

где K_1 — положительная постоянная.

В работе рассматривается следующая задача Дирихле для уравнения (1): определить решение u уравнения (1) из класса $Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}^3_+})$, удовлетворяющее граничному условию

$$u(x,y,0) = f(x,y), \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2, \tag{4}$$

где f — заданная функция из класса $Q_\alpha(\mathbf{R}^2)$.

Задачу (1), (4) при $f \equiv 0$ будем называть однородной.

В монографии [1] доказано, что в ограниченной области задача Дирихле для уравнения (1) (с аналитическими коэффициентами) фредгольмова и получено условие однозначной разрешимости этой задачи. Эти утверждения И. Н. Векуа получил в двумерном случае, однако они верны и для произвольной размерности и доказываются аналогично. В [2] доказано, что если $c \leq 0$, то задача Дирихле для уравнения (1) в полупространстве корректна в классе обобщенных функций H. В классе $M_\alpha(\overline{\mathbf{R}^3_+})$ задача (1), (4) исследована в [3] и доказано, что при $c \leq 0$ эта задача нетерова. В случае $a = b = c = 0$ в [4] доказано, что задача (1), (4) всегда имеет решение, а соответствующая однородная задача имеет $0,5(n+1)(n+2)$ линейно независимых решений. Здесь и в дальнейшем $n = [\alpha]$.

В представленной работе задача (1), (4) при $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ исследуется в классе $Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}^3_+})$. Получены следующие результаты.

Теорема 1. *Если $c > 0$ и $a \leq 0$, то однородная задача* (1), (4) *имеет бесконечное множество линейно независимых решений в классе $Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}^3_+})$. Если же $c > 0$ и $a > 0$, то для разрешимости неоднородной задачи* (1), (4) *необходимо, чтобы граничная функция f удовлетворяла бесконечному числу условий ортогональности.*

Теорема 2. *Если $c < 0$ или $c = 0$ и $a > 0$, то однородная задача* (1), (4) *имеет только нулевое решение. При $c = 0$ и $a \leq 0$ однородная задача* (1), (4) *имеет $0,5(n+1)(n+2)$ линейно независимых решений.*

Теорема 3. *При $c < 0$, $c = 0$ и $a \neq 0$, или же $c = a = 0$, $b \neq 0$ и $0 \leq \alpha < 0.5$, неоднородная задача* (1), (4) *имеет решение в классе $Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}^3_+})$.*

Теорема 4. *При $c = a = 0$, $b \neq 0$ и $\alpha \geq 0.5$ неоднородная задача* (1), (4) *при $f \in Q_\alpha(\mathbf{R}^2)$ имеет решение в классе $Q_\beta(\overline{\mathbf{R}^3_+})$, где $\beta = \alpha + 2n + 4$.*

Замечание 1. Сравнение полученных теорем с результатами работы [3] показывает, что класс $Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}^3_+})$ является более естественным для задачи (1), (4), чем класс $M_\alpha(\overline{\mathbf{R}^3_+})$.

Замечание 2. Из теоремы 1 следует, что если задача (1), (4) нетерова в классе $Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}^3_+})$, то $c \leq 0$.

В работе рассматривается также задача Коши для уравнения (1) при $c = 0$, $a \leq 0$ с полиномиальными данными Коши и доказывается существование и единственность решения этой задачи в классе $Q(\overline{\mathbf{R}^3_+}) = \bigcup\limits_{\alpha \geq 0} Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}^3_+})$.

2. Доказательство теорем 1–4

Для доказательства основных теорем нам понадобится следующее вспомогательное утверждение

Лемма 1. *Если u — решение уравнения* (1) *из класса $Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}^3}_+)$, то производные функции u также удовлетворяют оценке* (2) *в любом полупространстве $\{(x,y,t)|t \geq \varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0)$, где постоянные K и β зависят также от ε.*

Доказательство. Функция $E(x,y,t) = (4\pi r)^{-1} \exp\left(at + bx - r\sqrt{a^2+b^2-c}\right)$ является фундаментальным решением уравнения (1) (здесь $r = \sqrt{x^2+y^2+t^2}$). Пусть u — решение уравнения (1) в шаре $B_\delta = \{(x,y,t)|x^2+y^2+t^2 < \delta^2\}$, где $\delta > \varepsilon > 0$, и β — бесконечно дифференцируемая функция, обращающаяся в нуль при $x^2+y^2+t^2 \geq \varepsilon^2$ и равная единице при $x^2+y^2+t^2 \leq 0.25\varepsilon^2$. Имеет место следующее представление решения уравнения (1) ([7, с. 161])

$$u(x,y,t) = \iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\tau^2<\varepsilon^2} u(\xi,\eta,\tau) L(E(x-\xi, y-\eta, t-\tau)(1-\beta(\xi,\eta,\tau))) d\xi d\eta d\tau, \quad (5)$$

где $x^2+y^2+t^2 \leq (\delta-\varepsilon)^2$. Из (5) следует оценка

$$\left|\frac{\partial^{m+n+p} u(0,0,0)}{\partial x^n \partial y^m \partial t^p}\right| \leq K_\varepsilon \max_{x^2+y^2+t^2 \leq \varepsilon^2} |u(x,y,t)|. \quad (6)$$

Пусть $u \in Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}^3}_+)$ — решение уравнения (1) и $t_0 > \varepsilon$. Рассмотрим функцию $v(x,y,t) \equiv u(x_0+x, y_0+y, t_0+t)$. Очевидно, что v — решение уравнения (1) в шаре B_δ при $t_0 > \delta > \varepsilon$. Применяя неравенство (6) к функции v и используя, что $u \in Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}^3}_+)$, завершаем доказательство леммы.

Доказательство теоремы 1. Пусть $c > 0$, $a \leq 0$. Обозначим $\mu_\pm$ следующие функции

$$\mu_\pm(\sigma) = a \pm \sqrt{a^2 - c + \sigma^2},$$

где $\sqrt{a^2-c+\sigma^2}$ — некоторая непрерывная ветвь корня. Очевидно, что $\Re\mu_\pm(\sigma) \leq 0$ при $|\sigma| < \varepsilon$, где ε некоторая положительная постоянная, зависящая от a и c. Рассмотрим функции

$$u_k(x,y,t) = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sigma^k (e^{t\mu_+(\sigma)} - e^{t\mu_-(\sigma)}) e^{iy\sigma} d\sigma, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}^1, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Легко видеть, что u_k — линейно независимые ограниченные решения однородной задачи (1), (4), следовательно, однородная задача (1), (4) при любом $\alpha \geq 0$ имеет бесконечное число линейно независимых решений.

Пусть теперь $c > 0$, $a > 0$. Каждому решению u уравнения (1) из класса $Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}^3_+})$ сопоставим обобщенную функцию $U(t) \in S'(\mathbf{R}^2)$, зависящую от t, как от параметра, по формуле ([5, с. 8])

$$(U(t), \varphi) = \iint\limits_{\mathbf{R}^2} u(x,y,t)\varphi(x,y) dx dy,$$

где $\varphi \in S(\mathbf{R}^2)$ — бесконечно дифференцируемая быстро убывающая функция. Пусть $\widehat{U}(t)$ — преобразование Фурье обобщенной функции $U(t)$. Если u — решение задачи (1), (4), то из леммы 1 следует, что $U(t)$ и $\widehat{U}(t)$ вместе со всеми производными при $t \to \infty$ растут не быстрее полинома. Из леммы 1 также следует, что в преобразованиях Фурье уравнение (1) примет вид ([1, с. 10])

$$\frac{d^2\widehat{U}}{dt^2}(t) - 2a\frac{d\widehat{U}}{dt}(t) + (c - 2ibx - x^2 - y^2)\widehat{U}(t) = 0, \quad t > 0. \quad (7)$$

Обозначим λ_j, $j = 1, 2$ корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 2a\lambda + c - 2ibx - x^2 - y^2 = 0$. Имеем

$$\lambda_j(x, y) = a + (-1)^j \sqrt{a^2 - c + x^2 + y^2 + 2ibx}, \quad j = 1, 2, \tag{8}$$

где выбирается непрерывная ветвь корня, действительная часть которого неотрицательна. При $a > 0$ и $c > 0$ для достаточно малого положительного ε имеем

$$\Re\lambda_j(x, y) > 0, \quad x^2 + y^2 < \varepsilon^2, \quad j = 1, 2. \tag{9}$$

Пусть ω — бесконечно дифференцируемая в $\mathbf{R}^2$ функция, равная единице при $x^2 + y^2 < 0.25\varepsilon^2$ и обращающаяся в нуль при $x^2 + y^2 \geq \varepsilon^2$, и ψ_{mn}, $m, n = 0, 1, \ldots$ преобразования Фурье функций $\omega(x, y)x^m y^n$. Ясно, что ψ_{mn}, $m, n = 0, 1, \ldots$ — линейно независимы. Так как $u \in Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}^3_+})$, то из леммы 1 и неравенств (9) следует, что $\widehat{U}(t)$, решение уравнения (7), удовлетворяет условиям ([6])

$$(\widehat{U}(t), \omega(x, y)x^m y^n) = (U(t), \psi_{mn}) = 0, \quad t \geq 0, \quad m, n = 0, 1, \ldots$$

Подставляя в последнее равенство $t = 0$, и используя граничное условие (4), получим

$$\iint\limits_{\mathbf{R}^2} f(x, y)\psi_{mn}(x, y)dxdy = 0, \quad m, n = 0, 1, \ldots \tag{10}$$

Таким образом, при $c > 0$, $a > 0$ для разрешимости задачи (1), (4) необходимо, чтобы граничная функция f удовлетворяла бесконечному числу линейно независимых условий (10). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $c < 0$ или $c = 0$ и $a > 0$. Тогда из (8) следует

$$\Re\lambda_1(x, y) \leq 0, \quad \Re\lambda_2(x, y) > 0, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2. \tag{11}$$

Из граничного условия (4) при $f \equiv 0$ имеем $U(0) = 0$ и, следовательно,

$$\widehat{U}(0) = 0. \tag{12}$$

Используя (11), получаем, что однородная задача (7), (12) имеет только нулевое решение ([6]), поэтому однородная задача (1), (4) также имеет только нулевое решение.

Пусть теперь $c = 0$ и $a \leq 0$. Тогда из (8) следует

$$\Re\lambda_1(x, y) \leq 0; \quad \Re\lambda_2(x, y) > 0, \ (x, y) \neq (0, 0); \quad \Re\lambda_2(0, 0) = 0. \tag{13}$$

Из (13) следует, что функционал $\widehat{U}(t)$ сосредоточен в точке нуль ([6]), то есть функционал $\widehat{U}(t)$ действует на функции $\varphi \in S(\mathbf{R}^2)$ по формуле ([2])

$$(\widehat{U}(t), \varphi) = \sum_{j+k \leq m} a_{kj}(t) \frac{\partial^{k+j}\varphi(0, 0)}{\partial x^k \partial y^j}.$$

Переходя к прообразам Фурье, и учитывая, что u удовлетворяет оценке (2), получим

$$u(x, y, t) = \sum_{j+k \leq n} A_{kj}(t)x^k y^j, \quad n = [\alpha]. \tag{14}$$

Функция $u \in C^2(\mathbf{R}^3_+)$, поэтому A_{kj} также дважды непрерывно дифференцируемы при $t > 0$. Подставляя (14) в уравнение (1) при $c = 0$, и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $x^i y^j$, получим систему дифференциальных уравнений для определения A_{kj}

$$A''_{kj}(t) - 2aA'_{kj}(t) = 0, \qquad k + j = n,$$

$$A''_{kj}(t) - 2aA'_{kj}(t) + \sum_{k+j<p+q\le n} d_{kjpq}A_{pq}(t) = 0, \quad 0 \le k+j \le n-1, \quad t > 0, \tag{15}$$

где d_{kjpq} — определенные постоянные, зависящие от a, b, n, k, j, p, q. Значения A_{kj} при $t = 0$ получим после подстановки (14) в однородное граничное условие (4)

$$A_{kj}(0) = 0, \qquad 0 \le k + j \le n. \tag{16}$$

Итак, для определения A_{kj} получили задачу Коши (15), (16). Эта задача имеет $0.5(n+1)(n+2)$ линейно независимых решений. Так как $a \le 0$, то все решения растут на бесконечности не быстрее полинома, поэтому, подставляя решения (15), (16) в (14) получаем $0.5(n+1)(n+2)$ линейно независимых решений задачи (1), (4), принадлежащих классу $Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}^3_+})$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Предположим сначала, что $c < 0$ или $c = 0$ и $a \ne 0$. В этом случае функции (8) λ_j $j = 1, 2$ бесконечно дифференцируемы и $\Re\lambda_1(x, y) \le 0$ в $\mathbf{R}^2$. Поэтому обобщенная функция

$$\widehat{U}(t) = \exp(t\lambda_1(x, y))\widehat{f}, \tag{17}$$

где $\widehat{f}$ — преобразование Фурье граничной функции f, является решением уравнения (7) с начальным условием

$$\widehat{U}(0) = \widehat{f}. \tag{18}$$

Если мы покажем, что прообраз Фурье обобщенной функции $\widehat{U}$ является обычной функцией из класса $Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}^3_+})$, то теорема 3 будет доказана.

Пусть χ — бесконечно дифференцируемая функция, равная нулю при $x^2+y^2 \ge 1$, и равная единице при $x^2 + y^2 \le 0.25$. Из (8) следует, что функция

$$\widehat{\nu}(x, y, t) = \frac{\exp(t\lambda_1(x, y))(1 - \chi(x, y))}{x^2 + y^2}$$

бесконечно дифференцируема по x и y и производные всех порядков абсолютно интегрируемы в $\mathbf{R}^2$. Следовательно, прообраз Фурье — функция ν, является обычной функцией, быстро убывающей по x и y и имеющей полиномиальный рост по t. Поэтому функция

$$\begin{aligned} u_1(x, y, t) &= -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(f * \nu)(x, y, t) \\ &\equiv -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\iint\limits_{\mathbf{R}^2} f(\xi, \eta)\nu(x - \xi, y - \eta, t)d\xi d\eta \end{aligned} \tag{19}$$

принадлежит классу $Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}^3_+})$. Преобразование Фурье этой функции — $\widehat{U}_1$ — удовлетворяет уравнению (7) и начальному условию

$$\widehat{U}_1(0) = (1 - \chi)\widehat{f}. \tag{20}$$

Далее, рассмотрим функцию

$$\widehat{\mu}(x,y,t) = \exp(t\lambda_1(x,y))\chi(x,y). \tag{21}$$

Эта функция финитна и бесконечно дифференцируема в $\mathbf{R}^2$, следовательно, прообраз Фурье этой функции μ является быстро убывающей по x и y функцией, имеющей полиномиальный рост по t, следовательно, функция

$$u_2(x,y,t) = (f * \mu)(x,y,t) \equiv \iint\limits_{\mathbf{R}^2} f(\xi,\eta)\mu(x-\xi, y-\eta, t)d\xi d\eta \tag{22}$$

также принадлежит классу $Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}^3_+})$. Преобразование Фурье этой функции — $\widehat{U}_2$ — удовлетворяет уравнению (7) и начальному условию

$$\widehat{U}_2(0) = \chi\widehat{f}. \tag{23}$$

Из (20) и (23) следует, что преобразование Фурье обычной функции $u_1 + u_2$ — функция $\widehat{U}_1 + \widehat{U}_2$ — совпадает с функцией (17), то есть $u_1 + u_2$ — решение задачи (1), (4) из класса $Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}^3_+})$. Теорема 3 при $c < 0$ или $c = 0$ и $a \neq 0$ доказана.

Предположим теперь, что $c = a = 0$ и $b \neq 0$. В этом случае также образ Фурье функции (19) является решением уравнения (7) с начальным условием (20), однако функция (21) уже не дифференцируема в нуле, поэтому задачу (1) с граничным условием

$$u(x,y,0) = f_0(x,y), \tag{24}$$

где $f_0(x,y) = (f * \chi_1)(x,y)$ (χ_1 — прообраз Фурье функции χ, а f — граничная функция из (4)), следует рассмотреть отдельно.

В окрестности нуля λ_1 допускает оценку $|\lambda_1(x,y)| \sim \sqrt{|x|}$ (так как $b \neq 0$), поэтому функция μ из (21) удовлетворяет неравенству $|\mu(x,y,t)| \leq K(1 + x^2 + y^2)^{-1.5}(1+t)^{1.5}$ и, следовательно, при $\alpha < 0.5$ функция (22) также принадлежит классу $Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}^3_+})$. Таким образом, и в этом случае $u_1 + u_2$ — решение задачи (1), (4) из класса $Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}^3_+})$. Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Пусть $c = a = 0$, $b \neq 0$, и $f \in Q_\alpha(\mathbf{R}^2)$, где $\alpha \geq 0.5$. Так же как и при доказательстве последнего случая теоремы 3, утверждение достаточно доказать для задачи (1), (24). Функция (24) f_0 является сверткой функции f и прообраза Фурье функции χ. Так как функция χ — финитна и бесконечно дифференцируема, а f принадлежит классу $Q_\alpha(\mathbf{R}^2)$, получаем, что f_0 также является бесконечно дифференцируемой функцией, принадлежащей классу $Q_\alpha(\mathbf{R}^2)$ вместе с частными производными всех порядков.

Представим функцию f_0 в виде

$$\begin{aligned} f_0(x,y) &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!}\frac{\partial^k f_0}{\partial x^k}(0,y) + \frac{1}{(n+1)!}\int\limits_0^x (x-\sigma)^{n+1}\frac{\partial^{n+2} f_0}{\partial x^{n+2}}(\sigma,y)d\sigma \\ &\equiv \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!}\frac{\partial^k f_0}{\partial x^k}(0,y) + F(x,y). \end{aligned} \tag{25}$$

Сначала решим уравнение (1) с граничным условием

$$u(x,y,0) = \frac{\partial^{n+2} f_0}{\partial x^{n+2}}(x,y), \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2. \tag{26}$$

Так как $f \in Q_\alpha(\mathbf{R}^2)$ и функция

$$\widehat{\mu}_1(x,y,t) = (-ix)^{n+2}\exp(t\lambda_1(x,y))\chi(x,y) \tag{27}$$

финитна и имеет абсолютно интегрируемые производные до порядка $n+3$, получаем, что обычная функция

$$w(x,y,t) = \iint\limits_{\mathbf{R}^2} f(\xi,\eta)\mu_1(x-\xi,y-\eta,t)d\xi d\eta \tag{28}$$

принадлежит классу $Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}^3_+})$ и является решением задачи (1), (26). Рассмотрим функцию

$$\Psi(x,y,t) = \frac{1}{(n+1)!}\int\limits_0^x (x-\sigma)^{n+1}w(\sigma,y,t)d\sigma. \tag{29}$$

Так как w удовлетворяет (26), то при $t=0$ выполняется граничное условие $\Psi(x,y,0) = F(x,y)$, где F — функция из (25). Далее, функция (29) принадлежит множеству $Q_{\beta_0}(\overline{\mathbf{R}^3_+})$, где $\beta_0 = \alpha+n+2$, и непосредственно проверяется, что

$$\begin{aligned}
&\Psi_{xx}(x,y,t)+\Psi_{yy}(x,y,t)+\Psi_{tt}(x,y,t)-2b\Psi_x(x,y,t)\\
&\qquad = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}(w_x(0,y,t)-2bw(0,y,t)) + \frac{x^n}{n!}w(0,y,t)\\
&+\frac{1}{(n+1)!}\int\limits_0^x (x-\sigma)^{n+1}(w_{xx}(\sigma,y,t)+w_{yy}(\sigma,y,t)++w_{tt}(\sigma,y,t)-2bw_x(\sigma,y,t))d\sigma\\
&\qquad\qquad = \frac{x^n}{n!}w(0,y,t)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}(w_x(0,y,t)-2bw(0,y,t))
\end{aligned}$$

(последнее равенство выполняется, так как w удовлетворяет уравнению (1)), следовательно, решение задачи (1), (24) можно искать в виде

$$v(x,y,t) = \sum_{k=0}^{n+1} A_k(y,t)\frac{x^k}{k!} + \Psi(x,y,t), \tag{30}$$

где A_k подлежащие определению функции полиномиального роста, дважды непрерывно дифференцируемые в полуплоскости $\mathbf{R}^2_+ = \{(y,t)|t>0, y\in\mathbf{R}\}$ и непрерывные в $\overline{\mathbf{R}^2_+} = \{(y,t)|t \geq 0, y \in \mathbf{R}\}$. Подставляя функцию (30) в (1), и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений в $\mathbf{R}^2_+$ для определения A_k

$$\begin{aligned}
&A_{n+1,yy}(y,t)+A_{n+1,tt}(y,t) = w_x(0,y,t)-2bw(0,y,t),\\
&A_{n,yy}(y,t)+A_{n,tt}(y,t) = 2bA_n(y,t)-w(0,y,t),\\
&A_{k,yy}(y,t)+A_{k,tt}(y,t) = 2bA_{k+1}(y,t)-A_{k+2}(y,t), \quad k=0,\dots,n-1.
\end{aligned} \tag{31}$$

Подставляя (30) в граничные условия (24), и учитывая, что $\Psi(x,y,0) = F(x,y)$, получим

$$A_k(y,0) = \frac{\partial^k f_0}{\partial x^k}(0,y), \qquad k=0,\dots,n+1. \tag{32}$$

Итак, для определения A_k следует решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона в полуплоскости $\mathbf{R}^2_+$.

Лемма 2. *В полуплоскости $\mathbf{R}^2_+$ рассматривается задача Дирихле для уравнения Пуассона:*

$$\Delta\omega(y,t) = g(y,t), \quad (y,t) \in \mathbf{R}^2_+, \quad \omega(y,0) = \mu(y) \tag{33}$$

в классе дважды непрерывно дифференцируемых в $\mathbf{R}^2_+ = \{(y,t)|t > 0, y \in \mathbf{R}\}$ функций, непрерывных вплоть до границы. Тогда, если функция g принадлежит классу $Q_p(\overline{\mathbf{R}^2_+})$, а функция μ непрерывна в $\mathbf{R}$ и удовлетворяет неравенству $|\mu(y)| \le K(1+|y|)^q$, то задача (33) имеет решение ω в классе $Q_r(\overline{\mathbf{R}^2_+})$, где $r = \max(p+2, q)$.

Доказательство леммы 2. Представим функцию g в виде $g = g_1 + g_2$, где g_j $(j = 1,2)$ непрерывны в $\mathbf{R}^2_+$, $\operatorname{supp} g_1 \subset \{(y,t)|y^2+t^2 < 4\}$ и $\operatorname{supp} g_2 \subset \{(y,t)|y^2+t^2 > 1\}$. Функция

$$\omega_1(y,t) = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\mathbf{R}^2_+} g_1(\eta,\tau)\ln\sqrt{\frac{y^2+t^2}{(y-\eta)^2+(t-\tau)^2}}d\eta d\tau \tag{34}$$

является решением уравнения Пуассона $\Delta\omega_1(y,t) = g_1(y,t)$ при $(y,t) \in \mathbf{R}^2_+$, ограниченным при $y^2+t^2 \to \infty$. Для функции g_2 интеграл (34) не является сходящимся, так как g_2 имеет полиномиальный рост в бесконечности, поэтому, используя идею, изложенную в [9], вместо функции $\ln\sqrt{\frac{y^2+t^2}{(y-\eta)^2+(t-\tau)^2}}$ используем функцию источника, сильно убывающую в бесконечности. Для этого обозначим $z = y+it$, $\zeta = \eta+i\tau$ и при $|z| < |\zeta|$ представим функцию $\ln\sqrt{(y-\eta)^2+(t-\tau)^2}$ в следующей форме

$$\ln\sqrt{(y-\eta)^2+(t-\tau)^2} = \ln\sqrt{\eta^2+\tau^2} + 0.5(\ln(1-z\zeta^{-1}) + \ln(1-\bar{z}\bar{\zeta}^{-1})). \tag{35}$$

Здесь $\ln(1-\xi)$ некоторая непрерывная ветвь логарифма, аналитическая в $\Re\xi > 0$. Функция

$$\psi(z,\eta,\tau) = \ln\sqrt{\eta^2+\tau^2} + \sum_{k=1}^{M}\frac{1}{k}\left(\frac{z^k}{\zeta^k} + \frac{\bar{z}^k}{\bar{\zeta}^k}\right) \tag{36}$$

гармоническая при $\eta^2+\tau^2 > 1$, и из (35) следует, что при фиксированном z

$$\Omega(y,t;\eta,\tau) = \ln\sqrt{(y-\eta)^2+(t-\tau)^2} - \psi(z,\eta,\tau) = O(\eta^2+\tau^2)^{-0.5(M+1)}.$$

Если $M = [p]+2$, то интеграл

$$\omega_2(y,t) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\mathbf{R}^2_+} g_2(\eta,\tau)\Omega(y,t;\eta,\tau)d\eta d\tau \tag{37}$$

сходится и является решением уравнения $\Delta\omega_2 = g_2$, растущим на бесконечности не быстрее $(y^2+t^2)^{0.5(p+2)}$. Представим решение задачи (33) в виде $\omega = \nu+\omega_1+\omega_2$. Функция ν является решением задачи Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\Delta\nu(y,t) = 0, \quad (y,t) \in \mathbf{R}^2_+, \quad \nu(y,0) = \tilde{\mu}(y), \tag{38}$$

где

$$\tilde{\mu}(y) = \mu(y) - \omega_1(y,0) - \omega_2(y,0), \tag{39}$$

и, из (34) и (37) имеем, $|\tilde{\mu}(y)| \le K(1+|y|)^r$. Пусть v непрерывная функция, равная единице при $|y| \le 1$ и равная нулю при $|y| > 2$. Рассмотрим функцию

$$\nu(y,t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t\tilde{\mu}(\eta)v(\eta)d\eta}{(y-\eta)^2+t^2} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\mu}(\eta)(1-v(\eta))}{\eta^{[r]+1}}\left(\frac{z^{[r]+1}}{\eta - z} - \frac{\bar{z}^{[r]+1}}{\eta-\bar{z}}\right)d\eta, \quad z = y+it. \tag{40}$$

Аналогично [10] получаем, что функция (40) является решением задачи (38), из класса $Q_r(\overline{\mathbf{R}^2_+})$. Окончательно, из (40), (37) и (36) имеем, что функция $u = \nu + \omega_1 + \omega_2$ является решением задачи (33) из класса $Q_r(\overline{\mathbf{R}^2_+})$. Лемма доказана.

Используем эту лемму для завершения доказательства. Рассмотрим систему (31), (32). Граничные функции в (32) и функция $w(0,y,t)$ принадлежат классу $Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}^2_+})$, следовательно, используя лемму 2 получаем, что $A_{n+1} \in Q_{\beta_1}(\overline{\mathbf{R}^2_+})$, где $\beta_1 = \alpha+2$. Соответственно, правая часть второго уравнения в (31) принадлежит $Q_{\beta_1}(\overline{\mathbf{R}^2_+})$, следовательно, $A_n \in Q_{\beta_2}(\overline{\mathbf{R}^2_+})$, где $\beta_2 = \alpha+4$. Продолжая аналогично, имеем $A_{n-k} \in Q_{\beta_{k+2}}(\overline{\mathbf{R}^2_+})$, где $\beta_{k+2} = \alpha + 2(k+2)$, при $k = 0,\ldots,n$. Учитывая эти соотношения, а также, что $\Psi \in Q_{\beta_0}(\overline{\mathbf{R}^3_+})$, где $\beta_0 = \alpha+n+2$, из (32) получаем, что v — решение задачи (1), (24), принадлежит классу $Q_\beta(\overline{\mathbf{R}^3_+})$, где $\beta = \alpha+2n+4$. Так как функция (19) u_1 принадлежит $Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}^3_+})$, то $v+u_1$ — решение задачи (1), (4) из класса $Q_\beta(\overline{\mathbf{R}^3_+})$. Теорема 3 доказана.

3. Граничные задачи в классе $Q(\overline{\mathbf{R}^3_+})$

Предположим, что в (4) $f \in Q(\mathbf{R}^2) \equiv \bigcup\limits_{\alpha \ge 0} Q_\alpha(\mathbf{R}^2)$. Решение задачи (1), (4) ищем в классе $Q(\overline{\mathbf{R}^3_+})$. Теорема 1 в этом случае остается в силе. Если $c < 0$ или $c = 0$ и $a > 0$, то из теорем 2 и 3 следует, что задача (1), (4) в классе $Q(\overline{\mathbf{R}^3_+})$ однозначно разрешима. При $c = 0$ и $a < 0$ неоднородная задача (1), (4) имеет решение, а соответствующая однородная задача имеет бесконечное число линейно независимых решений. Если $c = a = 0$, то из теоремы 2 следует, что однородная задача также имеет бесконечное число линейно независимых решений в классе $Q(\overline{\mathbf{R}^3_+})$. Таким образом, задача (1), (4) в классе $Q(\overline{\mathbf{R}^3_+})$ является нетеровой только при $c < 0$ или $c = 0$ и $a > 0$.

В заключение рассмотрим задачу Коши для уравнения (1). Пусть u решение уравнения (1) из класса $Q(\overline{\mathbf{R}^3_+})$. Предполагаем, что на границе $\mathbf{R}^2$ функция u удовлетворяет условиям

$$u(x,y,0) = P_0(x,y), \quad u_t(x,y,0) = P_1(x,y), \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2, \tag{41}$$

где P_j $(j = 0,1)$ — заданные полиномы. Имеет место следующая

Теорема 5. *Если* $c = 0$ *и* $a \le 0$, *то задача* (1), (41) *имеет единственное решение в классе* $Q(\overline{\mathbf{R}^3_+})$.

Доказательство. Пусть $c = 0$, $a \le 0$ и

$$P_l(x,y) = \sum_{j+k \le m} a_{ljk}x^j y^k, \quad l = 0,1.$$

Решение задачи (1), (41) ищем в виде

$$u(x,y,t) = \sum_{j+k\le m} A_{jk}(t)x^j y^k, \tag{42}$$

где A_{jk} — бесконечно дифференцируемые функции при $t>0$. Подставляя функцию (42) в (1) и в граничные равенства (41), получим систему (15) с граничными условиями

$$A_{jk}(0) = a_{0jk}, \quad A'_{jk}(0) = a_{1jk}, \quad 0 \le j+k \le m. \tag{43}$$

Так как $a \le 0$, то задача (15), (43) имеет единственное решение в классе функций полиномиального роста, то есть неоднородная задача (1), (41) имеет решение. Так как любое решение задачи (1), (41) представляется в виде (42) ([8]), то это решение единственно. Теорема 5 доказана.

Из (42), в частности, следует, что если q_j $(j=0,1)$ порядок полинома P_j, то решение задачи (1), (41) принадлежит классу $Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}^3_+})$, где $\alpha = \max(q_0, q_1)$.

Итак, для эллиптических уравнений в некоторых случаях целесообразнее вместо задачи Дирихле рассматривать задачу Коши.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Векуа И. Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений. М.: Гостехиздат, 1948. 364 с.
2. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй спецкурс. М.: Наука, 1965. 328 с.
3. *Товмасян Н. Е.* Задача Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка в полупространстве в классе функций полиномиального роста // Диффер. уравн. 1989. Т. 25, № 6. С. 1015–1024.
4. *Товмасян Н. Е.* О существовании и единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в классах функций, имеющих особенности на границе области // Сиб. мат. журн. 1961. Т. 2, № 2. С. 290–312.
5. *Tovmasyan N. E.* Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics. Singapore: World Scientific, 1994. 232 p.
6. *Дикополов Г. В.* О краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве // Мат. сб. 1962. Т. 59, № 2. С. 215–228.
7. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
8. *Morrey C. B.* On the analyticity of the solutions of analytic non linear elliptic systems of partial differential equations // Amer. J. Math. 1958. V. 80. P. 219–237.
9. *Nevanlinna R.* Über Eine Erweiterung des Poissonschen Integrals // Suomalaisen Tiedeakademian Kustantama. 1925. V. 24, № 4. P. 1–14.
10. *Товмасян Н. Е., Бабаян А. О.* Задача Дирихле для эллиптических систем в классе функций полиномиального роста // Изв. НАН Армении, Мат. 2004. Т. 39, № 5. С. 67–78.

Бабаян Арменак Оганесович
Армения, Ереван, Государственный инженерный университет
armenak@web.am

Товмасян Назарет Ервандович
Армения, Ереван, Государственный инженерный университет