Неклассические уравнения
математической физики
2007. С. 150–157

УДК 517.9

ЗАДАЧА ШОУОЛТЕРА – СИДОРОВА – ВЕРИГИНА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

С. А. Загребина

В работе исследована обобщенная задача Шоуолтера – Сидорова – Веригина для уравнений соболевского типа. Полученный абстрактный результат проиллюстрирован конкретным примером, а именно линейным уравнением термоконвекции.

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства; оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т. е. линеен и непрерывен), а оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т. е. линеен, замкнут и плотно определен). Следуя [1], введем в рассмотрение *L-резольвентное множество* $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$ и *L-спектр* $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 0.1 (см. [1]). *Пусть оператор M сильно (L,p)-секториален справа и слева. Тогда существуют проекторы $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ такие, что операторы $L \in \mathcal{L}(\ker P; \ker Q) \cap \mathcal{L}(\mathrm{im} P; \mathrm{im} Q)$ и $M \in \mathcal{C}l(\ker P; \ker Q) \cap \mathcal{C}l(\mathrm{im} P; \mathrm{im} Q)$.*

Замечание 0.1. Теорема 0.1 верна и в случае (L,p)-секториальности оператора M, но при дополнительном требовании рефлексивности пространств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ (теорема Яги – Федорова).

Теорема 0.2 (см. [2]). *Пусть $\sigma^L(M) = \sigma^L_{in}(M) \cup \sigma^L_{ex}(M)$, причем $\sigma^L_{in}(M)$ содержится в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{C}$ с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$ и $\partial\Omega \cap \sigma^L(M) = \emptyset$. Тогда существуют проекторы $P_{in} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и $Q_{in} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ такие, что операторы $L \in \mathcal{L}(\ker P_{in}; \ker Q_{in}) \cap \mathcal{L}(\mathrm{im} P_{in}; \mathrm{im} Q_{in})$ и $M \in \mathcal{C}l(\ker P_{in}; \ker Q_{in}) \cap \mathcal{C}l(\mathrm{im} P_{in}; \mathrm{im} Q_{in})$.*

Проекторы P_{in} и Q_{in} имеют вид

$$P_{in} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R^L_\mu(M)d\mu, \quad Q_{in} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R^L_\mu(M)d\mu,$$

где контур $\gamma = \partial\Omega$. Кроме того, справедливо еще одно утверждение, которое мы докажем позже.

Следствие 0.1. *Пусть выполнены условия теорем* 0.1 *и* 0.2. *Тогда $P_{in}P = PP_{in} = P_{in}$ и $Q_{in}Q = QQ_{in} = Q_{in}$.*

Положим $P_{ex} = P - P_{in}$, в силу следствия 0.1 $P_{ex} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ — проектор. Возьмем $T \in \mathbb{R}_+$, u_0, $u_T \in \mathfrak{U}$ и рассмотрим задачу

$$P_{ex}(u(0) - u_0) = 0, \quad P_{in}(u(T) - u_T) = 0 \tag{0.1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства Челябинской области, проект урчел_07_01_96057

для линейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f, \tag{0.2}$$

где вектор-функция $f : [0,T] \to \mathfrak{F}$ будет определена ниже. Вектор-функцию $u \in C^1((0,T);\mathfrak{U}) \cap C([0,T];\mathfrak{U})$, удовлетворяющую уравнению (0.2), назовем его *решением*; решение $u = u(t)$ уравнения (0.2) назовем *решением задачи* (0.1), (0.2), если $\lim\limits_{t\to 0+} P_{ex}(u(t) - u_0) = 0$ и $\lim\limits_{t\to T-} P_{in}(u(t) - u_T) = 0$.

История задачи (0.1) начинается с одной стороны в [3], где она названа задачей Веригина, а с другой стороны и независимо — в [4], где она названа задачей сопряжения. Однако в обоих случаях вместо относительно спектральных проекторов P_{in} и P_{ex} рассматриваются спектральные пректоры оператора L, причем L вдобавок предполагается самосопряженным. Наш подход основан на концепции относительного спектра, предложенной Г. А. Свиридюком. Первые результаты в этом направлении изложены в [5], где рассмотрен частный случай задачи (0.1), причем с более жесткими, чем здесь, условиями на L-спектр оператора M. В [6] рассмотрена задача (0.1), но для тех же условий на L-спектр оператора M, что и в [5], однако для (L,p)-ограниченного оператора M отмечена возможность большего произвола в относительно спектральных условиях. В [7] результаты [6] распространены на случай (L,p)-радиального оператора M.

Здесь мы, опираясь на теорию уравнений вида (0.2) с (L,p)-секториальным оператором M и порождаемых ими вырожденных аналитических полугрупп операторов, установим однозначную разрешимость задачи (0.1), (0.2). Затем полученные абстрактные результаты будут применены к изучению разрешимости начальной задачи вида (0.1) для уравнения

$$(\lambda - \Delta)\Delta\psi_t = \nu\Delta^2\psi - \alpha\theta_x + \xi, \quad \theta_t = \delta\Delta\theta - \beta\psi_x + \zeta, \tag{0.3}$$

заданных в области $\Omega = (0,a) \times (0,b) \in \mathbb{R}^2$ с краевыми условиями Бенара

$$\psi(x,0,t) = \Delta\psi(x,0,t) = \psi(x,h,t) = \Delta\psi(x,h,t) = 0, \tag{0.4}$$

$$\theta(x,0,t) = \theta(x,h,t) = 0, \tag{0.5}$$

$$\text{функции } \psi \text{ и } \theta \text{ периодичны по } x \text{ с периодом } l. \tag{0.6}$$

Поэтому содержание статьи разбито на две части — в первой рассматривается задача (0.1), (0.2), а во второй — задача (0.1), (0.3)–(0.6). Отметим еще, что уравнения (0.3) моделируют в линейном приближении плоскопараллельную термоконвекцию вязкоупругой несжимаемой жидкости [8, 9].

1. Абстрактная задача

Пусть $\rho^L(M) \neq \emptyset$, тогда можно определить *правую* и *левую p-резольвенты* оператора M

$$R^L_{(\mu,p)}(M) = \prod_{q=0}^{p} R^L_{\mu_q}(M), \quad L^L_{(\mu,p)}(M) = \prod_{q=0}^{p} L^L_{\mu_q}(M),$$

где $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$, $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$, а точки $\mu_q \in \rho^L(M)$, $q \in \{0,1,\ldots,p\}$.

Определение 1.1 (см. [1]). Оператор M называется (L,p)-*секториальным*, если

(i) существуют константы $a \in \mathbb{R}$ и $\Theta \in (\pi/2, \pi)$ такие, что сектор $S^L_{a,\Theta}(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a)| < \Theta, \quad \mu \neq a\} \subset \rho^L(M)$,

(ii) существует константа $K \in \mathbb{R}_+$ такая, что

$$\max\left\{\left\|R^L_{(\mu,p)}(M)\right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, \left\|L^L_{(\mu,p)}(M)\right\|_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}\right\} \leq \frac{K}{\prod\limits_{q=0}^{p}|\mu_q - a|}$$

при любых $\mu_q \in S^L_{a,\Theta}(M)$, $q \in \{0, 1, \ldots, p\}$.

Пусть $\rho^L(M) \neq \emptyset$, возьмем $\alpha \in \rho^L(M)$ и введем в рассмотрение уравнения

$$R^L_\alpha(M)\dot{u} = (\alpha L - M)^{-1}Mu, \tag{1.1}$$

$$L^L_\alpha(M)\dot{f} = M(\alpha L - M)^{-1}f. \tag{1.2}$$

Теорема 1.1 (см. [1]). *Пусть оператор M (L, p)- секториален, тогда существует аналитическая разрешающая полугруппа уравнения* (1.1) (*уравнения* (1.2)).

В частности, искомые полугруппы задаются несобственными интегралами типа Данфорда – Тейлора соответственно

$$U^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma R^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu, \quad F^t = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma L^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu, \tag{1.3}$$

где $t \in \mathbb{R}_+$, контур $\Gamma \subset S^L_{a,\Theta}(M)$ такой, что $|\arg\mu| \to \Theta$ при $\mu \to \infty$, $\mu \in \Gamma$. Введем в рассмотрение ядра полугрупп $U^\cdot = \{U^t : t \in \mathbb{R}_+\}$ и $F^\cdot = \{F^t : t \in \mathbb{R}_+\}$, $\ker U^\cdot = \{\varphi \in \mathfrak{U} : U^t\varphi = 0 \ \exists t \in \mathbb{R}_+\}$ и $\ker F^\cdot = \{\psi \in \mathfrak{F} : F^t\psi = 0 \ \exists t \in \mathbb{R}\}$. Положим $\mathfrak{U}^0 = \ker U^\cdot$, $\mathfrak{F}^0 = \ker F^\cdot$ и через L_0 (M_0) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^0$ $(\mathfrak{U}^0 \cap \mathrm{dom}\, M)$.

Следствие 1.1 (см. [1]). *В условиях теоремы* 1.1 *операторы* $L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$, $M_0 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{F}^0)$, *причем существует оператор* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$.

Введем в рассмотрение образы $\mathrm{im}\ U^\cdot = \{u \in \mathfrak{U} : \lim\limits_{t\to 0+} U^t u = u\}$ и $\mathrm{im}\ F^\cdot = \{f \in \mathfrak{F} : \lim\limits_{t\to 0+} F^t f = f\}$ полугрупп $U^\cdot$ и $F^\cdot$ соответственно. Положим $\mathfrak{U}^1 = \mathrm{im}\ U^\cdot$, $\mathfrak{F}^1 = \mathrm{im}\ F^\cdot$ и через L_1 (M_1) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^1$ $(\mathfrak{U}^1 \cap \mathrm{dom}\ M)$.

Следствие 1.2 (см. [1]). *В условиях теоремы* 1.1
(i) *операторы* $L_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{F}^1)$, $M_1 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{F}^1)$.
(ii) $\overline{\mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\overline{\mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$.

Очевидно, $\mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1 \subset \mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1 \subset \mathfrak{F}$. В дальнейшем нам потребуются две гипотезы:

$$\mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U} \ (\mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}), \tag{1.4}$$

$$\text{существует оператор} \quad L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1). \tag{1.5}$$

Гипотеза (1.4) имеет место в случае сильной (L, p)-секториальности оператора M справа (слева), либо в случае рефлексивности пространства $\mathfrak{U}$ $(\mathfrak{F})$ (теорема Яги – Федорова). Гипотеза (1.5) справедлива, если оператор M сильно (L, p)-секториален, или если выполнено (1.4) и $\mathrm{im}\ L_1 = \mathfrak{F}^1$ (теорема Банаха). Заметим еще, что из (1.4) вытекает существование единиц $P = s\text{–}\lim\limits_{t\to 0+} U^t$ и $Q = s\text{–}\lim\limits_{t\to 0+} F^t$ полугрупп $U^\cdot$ и $F^\cdot$ соответственно.

Следствие 1.3 (см. [1]). *Пусть оператор M (L,p)-секториален, причем выполнены* (1.4), (1.5). *Тогда оператор $G = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$ нильпотентен степени p, а оператор $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}^1)$ секториален.*

Теперь пусть в дополнении к условиям следствия 1.3 выполнены условия теоремы 0.2. Тогда $U^t = P_{in}U^t + P_{ex}U^t = U^t_{in} + U^t_{ex}$, $F^t = Q_{in}F^t + Q_{ex}F^t = F^t_{in} + F^t_{ex}$, причем U^t_{in} и F^t_{in} можно представить в виде

$$U^t_{in} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu, \quad F^t_{in} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R^L_\mu(M)e^{\mu t}d\mu, \tag{1.6}$$

где контур $\gamma = \partial\Omega$. Действительно, поскольку аналитическая полугруппа U_{in} продолжима до аналитической группы, то $U^0_{in} = P_{in}$. Далее

$$\begin{aligned} P_{in}U^t &= (2\pi i)^{-1}\int_\gamma\int_\Gamma R^L_\mu(M)R^L_\nu(M)e^{\nu t}d\mu d\nu \\ &= (2\pi i)^{-1}\left(\int_\Gamma \frac{e^{\nu t}d\nu}{\nu-\mu}\int_\gamma R^L_\mu(M)d\mu + \int_\gamma \frac{d\mu}{\mu-\nu}\int_\Gamma R^L_\mu(M)e^{\nu t}d\nu\right) = U^t_{in} \end{aligned}$$

в силу теоремы о вычетах и аналога тождества Гильберта для L-резольвент:

$$(\nu-\mu)R^L_\mu(M)R^L_\nu(M) = R^L_\mu(M) - R^L_\nu(M).$$

Отсюда же, кстати сказать, следует $P_{in}P = PP_{in} = P_{in}$. Аналогично доказывается вторая формула (1.6) и, тем самым, следствие 0.1.

Далее положим im $P_{in(ex)} = \mathfrak{U}^1_{in(ex)}$, im $Q_{in(ex)} = \mathfrak{F}^1_{in(ex)}$. По построению $\mathfrak{U}_{in} \oplus \mathfrak{U}_{ex} = \mathfrak{U}^1$ и $\mathfrak{F}_{in} \oplus \mathfrak{F}_{ex} = \mathfrak{F}^1$. Обозначим через $L_{in(ex)}$ $(M_{in(ex)})$ сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}_{in(ex)}$ $(\mathrm{dom}M \cap \mathfrak{U}_{in(ex)})$. Аналогично следствию 1.2 нетрудно показать, что операторы $L_{in(ex)} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}_{in(ex)};\mathfrak{F}_{in(ex)})$, $M_{in(ex)} \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}_{in(ex)};\mathfrak{F}_{in(ex)})$, причем в силу (1.5) существует оператор $L^{-1}_{in(ex)} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}_{in(ex)};\mathfrak{U}_{in(ex)})$. Также нетрудно аналогично следствию 1.3 показать, что оператор $S_{ex} = L^{-1}_{ex}M_{ex} \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U}_{ex})$ будет секториальным, а оператор $S_{in} = L^{-1}_{in}M_{in} : \mathfrak{U}_{in} \to \mathfrak{U}_{in}$ — ограниченным.

Теперь у нас все готово для доказательства однозначной разрешимости задачи (0.1) для уравнения (0.2), которое в силу (L,p)-секториальности оператора M, условий (1.4), (1.5) и условий теоремы 0.2 редуцируется к виду

$$G\dot{u}^0 = u^0 + M_0^{-1}f^0, \tag{1.7}$$

$$\dot{u}^{in} = S_{in}u^{in} + L^{-1}_{in}f^{in}, \tag{1.8}$$

$$\dot{u}^{ex} = S_{ex}u^{ex} + L^{-1}_{ex}f^{ex}, \tag{1.9}$$

где $f^0 = (\mathbb{I}-Q)f$, $f^{in(ex)} = Q_{in(ex)}f$, $u^0 = (\mathbb{I}-P)u$, $u^{in(ex)} = P_{in(ex)}u$.

Лемма 1.1. *Пусть оператор M (L,p)-секториален, выполнены условия* (1.4), (1.5) *и условия теоремы* 0.2. *Тогда для любой вектор-функции*

$$f^0 \in C^p([0,T];\mathfrak{F}^0) \cap C^{p+1}((0,T);\mathfrak{F}^0)$$

существует единственное решение уравнения (1.7), *которое к тому же имеет вид*

$$u^0(t) = -\sum_{q=0}^{p} G^q M_0^{-1} f^{0(q)}(t).$$

Доказательство. Подстановкой вектор-функции $u^0 = u^0(t)$ в (1.7) убеждаемся в существовании решения. Единственность получается последовательным дифференцированием однородного уравнения (1.7) $0 = G^p u^{0(p)} = \ldots = G\dot{u}^0 = u^0$.

Лемма 1.2. *В условиях леммы* 1.1 *для любых* $u_T \in \mathfrak{U}$ *и* $f^{in} \in C([0,T];\mathfrak{F}^{in})$ *существует единственное решение задачи* $P_{in}(u^{in}(T) - u_T) = 0$ *для уравнения (1.8), которое к тому же имеет вид*

$$u^{in}(t) = U_{in}^{t-T} u_T - \int_t^T R_{in}^{t-s} f^{in}(s) ds.$$

Здесь $R_{in}^t = (2\pi i)^{-1} \int_\gamma (\mu L - M)^{-1} e^{\mu t} d\mu.$

Доказательство. Убеждаемся подстановкой, что вектор-функция $u^{in} = u^{in}(t)$ является решением данной задачи. Пусть $v = v(t)$, $t \in [0,T]$ — другое решение этой задачи. Построим вектор-функцию $w(s,t) = L_{in} U_{in}^{t-s} v(s)$. По построению

$$\frac{\partial w(s,t)}{\partial s} = L_{in} \frac{\partial U_{in}^{t-s}}{\partial s} v(s) + L_{in} U_{in}^{t-s} \frac{\partial v(s)}{\partial s} = 0.$$

Значит, $w(T,t) = w(t,t)$, т.е. $U_{in}^{t-T} v(t) - v(t) = 0$.

Лемма 1.3. *В условиях леммы* 1.1 *для любых* $u_0 \in \mathfrak{U}$ *и* $f^{ex} \in C^1([0,T];\mathfrak{F}^{ex})$ *существует единственное решение задачи* $P_{ex}(u^{ex}(0) - u_0) = 0$ *для уравнения* (1.9), *которое к тому же имеет вид*

$$u^{ex}(t) = U_{ex}^t u_0 + \int_0^t R_{ex}^{t-s} f^{ex}(s) ds.$$

Здесь $R_{ex}^t = P_{ex}(2\pi i)^{-1} \int_\Gamma (\mu L - M)^{-1} e^{\mu t} d\mu.$

Утверждение леммы 1.3 в силу секториальности оператора S — классический результат. Итак, доказана

Теорема 1.2. *Пусть оператор* M (L,p)*-секториален, выполнены условия* (1.4), (1.5) *и условия теоремы* 0.2. *Тогда для любых* $u_0, u_T \in \mathfrak{U}$ *и вектор-функции* $f = f(t)$, $t \in [0,T]$, *удовлетворяющей условиям лемм* 1.1 – 1.3, *существует единственное решение задачи* (0.1), (0.2), *которое к тому же имеет вид* $u(t) = u^0(t) + u^{in}(t) + u^{ex}(t)$.

2. Конкретная интерпретация

Редуцируем задачу (0.3)–(0.6) к задаче (0.1), (0.2). Положим $\mathfrak{U} = \mathfrak{V} \times \mathfrak{W}$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{G} \times \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{V} = \{v \in W_2^4(\Omega) : v$ удовлетворяет (0.4), (0.6)$\}$, $\mathfrak{W} = \mathfrak{G} = \mathfrak{H} = L_2(\Omega)$; операторы L и M зададим формулами

$$L = \begin{pmatrix} (\lambda - \Delta)\Delta & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \nu\Delta^2 & \alpha \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \beta \dfrac{\partial}{\partial x} & \delta\Delta \end{pmatrix}$$

соответственно. Очевидно, что оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, а оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $\operatorname{dom} M = \mathfrak{V} \times \{w \in W_2^2(\Omega) : w$ удовлетворяет (0.4), (0.5)$\}$.

Для доказательства $(L,0)$-секториальности оператора M введем в рассмотрение собственные функции оператора Лапласа Δ, определенного в области Ω и удовлетворяющие условиям (0.4), (0.6). Эти собственные функции удобно разбить на три семейства

$$F_1=\left\{\cos\frac{\pi mx}{a}\sin\frac{\pi ny}{b}\right\},\ F_2=\left\{\sin\frac{\pi kx}{a}\sin\frac{\pi ly}{b}\right\},\ F_3=\left\{\sin\frac{\pi jx}{b}\right\},$$

где j, k, l, m, $n\in\mathbb{N}$. В дальнейшем нормированные функции каждого семейства будем обозначать символами φ^1_{mn}, φ^2_{kl}, φ^3_j соответственно, а символами λ^1_{mn}, λ^2_{kl}, λ^3_j будем обозначать соответствующие собственные значения. Для построения оператора $(\mu L-M)^{-1}$ применим метод Фурье, т.е. разложим функции v, w, g, h в ряды по функциям $\{\varphi^1_{mn}\}\cup\{\varphi^2_{kl}\}\cup\{\varphi^3_j\}$ и подставим получившиеся ряды в систему уравнений

$$\mu(\lambda-\Delta)\Delta v-\nu\Delta v-\alpha w_x=g,\quad (\mu-\delta\Delta)w-\beta v_x=h.$$

В результате после последовательного ортогонального проектирования получим блоки из шести уравнений.

$$\begin{aligned}
&\lambda^1_{mn}[\mu(\lambda-\lambda^1_{mn})-\nu\lambda^1_{mn}]v^1_{mn}-\alpha\frac{\pi m}{a}w^2_{mn}=g^1_{mn},\\
&\lambda^2_{kl}[\mu(\lambda-\lambda^2_{kl})-\nu\lambda^2_{kl}]v^2_{kl}+\alpha\frac{\pi k}{a}w^1_{kl}=g^2_{kl},\\
&\lambda^3_j[\mu(\lambda-\lambda^3_j)-\nu\lambda^3_j]v^3_j=g^3_j,\\
&(\mu-\delta\lambda^1_{mn})w^1_{mn}-\beta\frac{\pi m}{a}w^2_{mn}=h^1_{mn},\\
&(\mu-\delta\lambda^2_{kl})w^2_{kl}+\beta\frac{\pi k}{a}v^1_{kl}=h^2_{kl},\\
&(\mu-\delta\lambda^3_j)w^3_j=h^3_j.
\end{aligned}\tag{2.1}$$

Для решения этой системы уравнений прежде всего заметим, что без потери общности можно взять $k=m$, $l=n$. Кроме того заметим, что $\lambda^1_{mn}=\lambda^2_{mn}$, поэтому положим $\lambda^1_{mn}=\lambda^2_{mn}=\lambda_{mn}$. Решая систему (2.1), получим L-резольвенту оператора M в виде квадратной матрицы $A=||A_{ij}||^6_{i,j=1}$ элементы которой представим следующим образом:

$$\begin{aligned}
A_{11}&=\sum_{m,n}\Delta_{mn}\lambda_{mn}[\mu(\lambda-\lambda_{mn})-\nu\lambda_{mn}]\left\langle\cdot,\varphi^1_{mn}\right\rangle\varphi^1_{mn},\\
A_{15}&=\sum_{m,n}\Delta_{mn}a^{-1}\alpha\pi m\left\langle\cdot,\varphi^2_{mn}\right\rangle\varphi^1_{mn},\\
A_{22}&=\sum_{m,n}\Delta_{mn}\lambda_{mn}[\mu(\lambda-\lambda_{mn})-\nu\lambda_{mn}]\left\langle\cdot,\varphi^2_{mn}\right\rangle\varphi^2_{mn},\\
A_{24}&=-\sum_{m,n}\Delta_{mn}a^{-1}\alpha\pi m\left\langle\cdot,\varphi^1_{mn}\right\rangle\varphi^2_{mn},\\
A_{33}&=\sum_{j}\frac{\left\langle\cdot,\varphi_j\right\rangle\varphi_j}{\lambda_j[\mu(\lambda-\lambda_j)-\nu\lambda_j]},\\
A_{42}&=\sum_{m,n}\Delta_{mn}\beta a^{-1}\pi m\left\langle\cdot,\varphi^2_{mn}\right\rangle\varphi^1_{mn},\\
A_{44}&=\sum_{m,n}\Delta_{mn}(\mu-\delta\lambda^1_{mn})\left\langle\cdot,\varphi^1_{mn}\right\rangle\varphi^1_{mn},\\
A_{51}&=-\sum_{m,n}\Delta_{mn}\beta a^{-1}\pi m\left\langle\cdot,\varphi^1_{mn}\right\rangle\varphi^2_{mn},\\
A_{55}&=\sum_{m,n}\Delta_{mn}(\mu-\delta\lambda_{mn})\left\langle\cdot,\varphi^2_{mn}\right\rangle\varphi^2_{mn},\\
A_{66}&=\sum_{j}\frac{\left\langle\cdot,\varphi_j\right\rangle\varphi_j}{\mu-\delta\lambda_j}.
\end{aligned}$$

Здесь $\Delta_{mn}^{-1} = \lambda_{mn}[\mu(\lambda - \lambda_{mn}) - \nu\lambda_{mn}](\mu - \delta\lambda_{mn}) + \alpha\beta a^{-2}\pi^2 m^2$, $\lambda_j = \lambda_j^3$, а все остальные элементы матрицы равны нулевому оператору $\mathbb{O}$. Отсюда вытекает, во-первых, что L-спектр оператора M имеет вид

$$\sigma^L(M) = \left\{ \frac{\nu\lambda_{mn}}{\lambda - \lambda_{mn}} + \varepsilon_{mn} \right\} \cup \{\delta\lambda_{mn} - \varepsilon_{mn}\} \cup \left\{ \frac{\nu\lambda_j}{\lambda - \lambda_j} \right\} \cup \{\delta\lambda_j\}. \tag{2.2}$$

Здесь $|\varepsilon_{mn}| \sim \sqrt{\left| \frac{m^2}{\lambda_{mn}(\lambda - \lambda_{mn})} \right|}$ при $m, n \to \infty$, и поскольку $\lambda_{mn} \sim -m^2 - n^2$ при $m, n \to \infty$, то значит существует сектор требуемого раствора, содержащий $\sigma^L(M)$. Во-вторых, при достаточных больших $|\mu|$, лежащих вне этого сектора, имеем

$$\max \left\{ ||R_\mu^L(M)||_{\mathcal{L}(\mathfrak{U})}, ||L_\mu^L(M)||_{\mathcal{L}(\mathfrak{F})}, \right\} \leq \text{const } |\mu|^{-1}.$$

Итак, доказана

Лемма 2.1 *При любых $\alpha, \beta, \lambda, \nu \in \mathbb{R}$, $\delta \in \mathbb{R}_+$ оператор M $(L, 0)$-секториален.*

Теперь выясним, выполняются ли условия (1.4), (1.5). Поскольку пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ рефлексивны, то в силу леммы 2.1 и теоремы Яги – Федорова условия (1.4) выполняются, причем

(i) $\mathfrak{U}^0 = \mathfrak{F}^0 = \{0\}$, $\mathfrak{U}^1 = \mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}$, если $\lambda \neq \lambda_{mn}$ и $\lambda \neq \lambda_j$;

(ii) $\mathfrak{U}^0 = \mathfrak{F}^0 = \ker L = \operatorname{span}\{\operatorname{col}(\varphi_j, 0)\}$, $\mathfrak{U}^1 = \{u \in \mathfrak{U} : \langle u, \varphi_j \rangle = 0\}$, $\mathfrak{F}^1 = \{f \in \mathfrak{F} : \langle g, \varphi_j \rangle = 0\} = \operatorname{im} L$, если $\lambda \neq \lambda_{mn}$ и $\lambda = \lambda_j$;

(iii) $\mathfrak{U}^0 = \mathfrak{F}^0 = \ker L = \operatorname{span}\{\operatorname{col}(\varphi_{mn}^1, 0), \operatorname{col}(\varphi_{mn}^2, 0)\}$, $\mathfrak{F}^1 = \{f \in \mathfrak{F} : \langle g, \varphi_{mn}^k \rangle = 0, k = 1, 2\} = \operatorname{im} L$, $\mathfrak{U}^1 = \{u \in \mathfrak{U} : v = \bar{v} + v_{mn}(w), \langle \bar{v}, \varphi_{mn}^k \rangle = 0,\ k = 1, 2,\ v_{mn}(w) = 2\pi m a^{-1}\nu^{-1}\lambda_{mn}^{-2}\left(\langle w, \varphi_{mn}^1 \rangle \varphi_{mn}^2 + \langle w, \varphi_{mn}^2 \rangle \varphi_{mn}^1\right)\}$, если $\lambda = \lambda_{mn}$ и $\lambda \neq \lambda_j$;

Условие (1.5) тоже выполняется, причем оператор L_1^{-1} можно представить в виде квадратной матрицы $A = ||A_{ij}||_{i,j=1}^2$, где

$$A_{11} = \sum_{m,n}{}' \frac{\langle \cdot, \varphi_{mn}^1 \rangle \varphi_{mn}^1}{\lambda_{mn}(\lambda - \lambda_{mn})} + \sum_{m,n}{}' \frac{\langle \cdot, \varphi_{mn}^2 \rangle \varphi_{mn}^2}{\lambda_{mn}(\lambda - \lambda_{mn})} + \sum_{j}{}' \frac{\langle \cdot, \varphi_j \rangle \varphi_j}{\lambda_j(\lambda - \lambda_j)},$$

$$A_{21} = V_{mn},\ A_{21} = \mathbb{O},\ A_{22} = \mathbb{I}.$$

Оператор

$$V_{mn} = \begin{cases} \mathbb{O}, & \text{если } \lambda = \lambda_{mn}, \\ \alpha\pi m a^{-1}\nu^{-1}\lambda_{mn}^{-2}(\langle \cdot, \varphi_{mn}^1 \rangle \varphi_{mn}^2 + \langle \cdot, \varphi_{mn}^2 \rangle \varphi_{mn}^1), & \text{если } \lambda \neq \lambda_{mn}. \end{cases}$$

(Штрих у знака суммы означает отсутствие слагаемых, для которых $\lambda = \lambda_{mn}$ или $\lambda = \lambda_j$). Таким образом доказана

Лемма 2.2 *При любых $\alpha, \beta, \lambda, \nu \in \mathbb{R}$, $\delta \in \mathbb{R}_+$ выполнены условия* (1.4), (1.5).

Из (2.2) вытекает дискретность L-спектра $\sigma^L(M)$ оператора M. Это значит, что и условия теоремы 0.2 тоже выполняются, причем для любого замкнутого контура $\gamma \in \mathbb{C}$, ограничивающего область, содержащую конечное множество точек из $\sigma^L(M)$, и непересекающегося с $\sigma^L(M)$. Итак, все условия теоремы 1.2 выполнены, и поэтому справедлива

Теорема 2.1. *При любых α, β, λ, $\nu \in \mathbb{R}$; δ, $T \in \mathbb{R}_+$, u_0, $u_T \in \mathfrak{U}$; ξ, $\zeta \in C^1([0, T]; L_2(\Omega))$ существует единственное решение*

$$u = \operatorname{col}(\psi, \theta) \in C^1((0, T); \mathfrak{U}) \cap C^0([0, T]; \mathfrak{U})$$

задачи (0.1) *для уравнений* (0.3) *с краевыми условиями* (0.4)–(0.6).

Представление решения $u = u(t)$ в том виде, в котором приведено в теореме 1.2, очень громоздко, поэтому здесь не приводится.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить свою искреннюю благодарность профессору Г. А. Свиридюку за постановку задачи и интерес к работе и профессору А. И. Кожанову за поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.

2. *Келлер А. В.* Исследование ограниченных решений линейных уравнений типа Соболева. Дис. … канд. физ.-мат. наук. Челябинск, 1997.

3. *Панков А. А., Панкова Т. Е.* Нелинейные эволюционные уравнения с необратимым операторным коэффициентом при производной // Докл. Акад. наук Украины. 1993. № 9. С. 18–20.

4. *Pyatkov S. G.* Operator theory. Nonclassical problems. Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2002.

5. *Свиридюк Г. А., Загребина С. А.* Задача Веригина для линейных уравнений соболевского типа с относительно p-секториальными операторами // Диффер. уравн. 2002. Т. 38, № 12. С. 1646–1652.

6. *Загребина С. А.* О задаче Шоуолтера – Сидорова // Изв. вузов. Математика. 2007. № 3. С. 22–28.

7. *Загребина С.А., Сагадеева М. А.* Обобщенная задача Шоуолтера – Сидорова для уравнений соболевского типа с сильно (L, p)-радиальным оператором // Вестн. МаГУ. Сер. Математика. Магнитогорск. 2006. Вып. 9. С. 17–27.

8. *Свиридюк Г. А.* Разрешимость задачи термоконвекции вязкоупругой несжимаемой жидкости // Изв. вузов. Математика. 1990. № 12. С. 65–72.

9. *Свиридюк Г. А.* Фазовые пространства полулинейных уравнений типа Соболева с относительно сильно секториальным оператором // Алгебра и анализ. 1994. Т. 6, № 5. С. 252–272.

Загребина Софья Александровна
Россия, Челябинск, Челябинский государственный педагогический университет
zsophiya@mail.ru