Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 39–40

УДК 517.95

РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПРОТЕКАНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ НАВЬЕ – СТОКСА

© У. У. Абылкаиров

UAbylkairov@kazsu.kz

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Рассматривается вопрос об однозначной разрешимости обратной задачи, то есть определения тройки функций $\{\vec{v}(t,x), \nabla p(x,t), \vec{f}(x)\}$, удовлетворяющей в $Q \equiv (0,T) \times \Omega$ нелинейной системе Навье – Стокса, финальным условиям переопределения.

1. Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset R^2$, ограниченная область с границей $\Gamma = \partial\Omega$, состоящей из связанных компонент Γ^0, Γ^1. Рассмотрим в $Q = \Omega \times (0, T)$ обратную задачу определения тройки функции $\{\vec{v}(t,x), \nabla p(x,t), \vec{f}(x)\}$ удовлетворяющих нелинейной системе Навье – Стокса и следующим условиям

$$\vec{v}_t - \nu\,\Delta\vec{v} + (\vec{v},\nabla)\vec{v} + \mathrm{grad}p = \vec{f}(x)\cdot\vec{g}(x,t), \quad \mathrm{div}\,\vec{v} = 0 \quad \text{в} \quad Q, \tag{1}$$

$$\vec{v}(0,x) = \vec{v}_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$\vec{v}(t,x) = 0, \quad (x,\,t) \in \Sigma^{0,T} = \Gamma^0 \times [0,T]; \quad v_\tau = 0, \quad (x,\,t) \in \Sigma^{1,T} = \Gamma^1 \times [0,T], \tag{3}$$

$$p(x,t) = \varphi(t) + const \quad (x,\,t) \in \Sigma^{1,T} = \Gamma^1 \times [0,T] \tag{4}$$

и дополнительным условиям финального переопределения:

$$\vec{v}(x,T) = \vec{v}_T \quad \text{на} \quad \Omega_T, \quad \nabla p(x,T) = \nabla\pi_T \quad \text{на} \quad \Omega_T. \tag{5}$$

Обратная задача восстановления правой части 2D-3D системы Навье – Стокса в области Q и $Q_\infty = \Omega \times [0,\,\infty)$ с однородными граничными условиями Дирихле исследованы в [1–4], а условиями (2)–(5) для 2D-3D линеаризованной системы Навье – Стокса получены полные результаты в [5–7].

В этой постановке она ставится впервые, отличительной чертой этой обратной задачи является соответствующие граничные условия (3_2),(3), которые принято называть *нестандартными граничными условиями.*

Первые результаты о корректности многомерной обратной задачи для системы (1)–(5) появились в 1989–1990 гг. в работах [1–2] и автора [3–4].

Выведем операторное уравнение относительно неизвестной функции $\vec{f}(x)$. Для корректного введения оператора T_g при фиксированном $g(x,t)$ и для любого $\vec{f}(x) \in L^2(\Omega)$, мы можем по теореме 1.2 (см. [5]), найти единственное решение $\vec{v}(x,t) \in W_2^{2,1}(Q) \cap L^2(0,T;V^1)$ и сопоставить произвольному $\vec{f}(x) \in L^2(\Omega)$. При $\vec{F}_t \in L_{2,1}(Q)$ и $\vec{v}_T \in W^{2,2}(\Omega) \cap V^1(\Omega)$ мы имеем следующие априорные оценки:

$$\max_{0\le t\le T}\left(\|\vec{v}_t\|_{2,\Omega} + \|\Delta\vec{v}\|_{2,\Omega} + \|\nabla p\|_{2,\Omega}\right) \le c < \infty \tag{6}$$

(см. [8]), поэтому учитывая вышесказанное, определим линейный оператор T_g следующим образом:

$$T_g: \ \vec{f} \in L^2(\Omega) \mapsto \vec{v}_t(x,T) \in L^2(\Omega). \tag{7}$$

Другой линейный оператор $S:\ L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ введем с помощью следующего соотношения:

$$\left(S\vec{f}\right)(x) = \frac{1}{g(x,T)} \cdot \left(T_g\vec{f}\right)(x). \tag{8}$$

Тем самым, если $\vec{f} \cdot g \in L^2(Q)$ и $\vec{F}_t = \vec{f} \cdot g_t \in L_{2,1}(Q)$, дополнительно $g(x,t)$, $g_t \in C(\overline{Q})$, $|g(x,T)| \geq g_T > 0$ при $x \in \Omega$,можем найти след при $t = T$ соотношения (1)

$$\vec{v}_t(x,T) - \nu\Delta\vec{v}_T + (\vec{v}_T, \nabla)\vec{v}_T = -\nabla\pi_T + \vec{f}(x)g(x,T). \tag{9}$$

Обозначив через

$$\vec{\aleph} = \frac{1}{g(x,T)}\left(\nu\Delta\vec{v}_T - (\vec{v}_T, \nabla)\vec{v}_T - \nabla\pi_T(x)\right), \tag{10}$$

запишем (9) в терминах вновь введенных операторов T_g, S соотношениями (7)–(8) следующим образом:

$$S\vec{f} = \vec{f} + \vec{\aleph}. \tag{11}$$

Следующая сформулированная теорема указывает об эквивалентности исходной обратной задачи (1)–(5) операторному уравнению (11) для любого $\vec{\aleph} \in L^2(\Omega)$.

Теорема 1. *Пусть* $\Omega \in R^2; \vec{v}_0, \vec{v}_T \in W^{2,2}(\Omega) \cap V^1(\Omega), \nabla\pi_T \in G(\Omega)$ *и дополнительно* $g(x,t), g_t \in C(\overline{Q}), |g(x,T)| \geq g_T > 0$ *при* $x \in \Omega$. *Тогда при* $\sqrt{c}\sqrt[4]{2}\|\vec{v}_T\|_{4,\Omega} < \nu$ *задача (1)–(5) эквивалентна операторному уравнению (11) для любого* $\vec{\aleph} \in L^2(\Omega)$.

Теорема 2. *Пусть* $\Omega \in R^2; \vec{v}_0, \vec{v}_T \in W^{2,2}(\Omega) \cap V^1(\Omega), \nabla\pi_T \in G(\Omega)$ *и дополнительно* $g(x,t), g_t \in C(\overline{Q}), |g(x,T)| \geq g_T > 0$ *при* $x \in \Omega, \sqrt{c}\sqrt[4]{2}\|\vec{v}_T\|_{4,\Omega} < \nu$. *Тогда при условий*

$$\|\vec{\aleph}\|_{2,\Omega} + \frac{1}{\inf\limits_{\Omega}|g(x,T)|}\Bigg(\|\nu\Delta\vec{v}_0 - (\upsilon,\nabla)\vec{v}_0\|_{2,\Omega} + \sup_{\Omega}|g(x,0)|\exp(-\tfrac{\nu T}{2c^2}) +$$
$$+\int\limits_0^T \sup_{\Omega}|g_t(x,t)|\exp(-\tfrac{\nu(T-t)}{2c^2})\,dt\Bigg) \times \left(\frac{1}{\nu^2}\left(\|\vec{v}_0\|^2_{2,\Omega} + \frac{3}{2}\left(\int\limits_0^T \sup_{\Omega}|g_t(x,t)|\right)^2\right)\right) < 1.$$

существует решение обратной задачи (1)–(5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васин И. А.* Постановка и исследования некоторых обратных задач для системы уравнений Навье – Стокса // Условно-корректные задачи математической физики. Тезисы Всесоюзной конференции (2–6 октября 1989, Алма-Ата). Красноярск, 1989. С. 30.
2. *Prilepko A. I., Orlovsky D., Vasin I. A.* Method for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics // Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker, 2000. V. 231.
3. *Абылкаиров У. У.* Обратная задача для уравнения Навье – Стокса // Условно-корректные задачи математической физики. Тезисы Всесоюзной конференции (2–6 октября 1989, Алма-Ата). Красноярск, 1989. С. 6.
4. *Абылкаиров У. У.* Обратная задача для уравнения Навье – Стокса // 7th Czechoslovac Conference on Differential Equations and Their Application, (EQADIFF7). Praha, 1989. C. 1–2.
5. *Abylkairov U. U.* Solvability local and nonlocal inverse problems for Navir-Stokes systems // International Conference “Tikhonov and Contemporary Mathematics”, Moscow State Lomonosov University, June 19–25, 2006. Section 3. P. 7–9.
6. *Абылкаиров У. У.* Обратная задача протекания для линеаризованной 2D-3D системы Навье – Стокса // Математический журнал. 2006. Т. 6, № 2(20). С. 14–22.
7. *Абылкаиров У. У.* Обратная задача для линеаризованной 2D-3D системы Навье – Стокса с нестандартными граничными условиями // Неклассические уравнения математической физики: Сб. науч. работ. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2005. 11 с.
8. *Ладыженская О. А.* О единственности и гладкости обобщенных решений уравнений Навье – Стокса // Зап. науч. семин. ЛОМИ. 1967. Т. 5. С. 169–185.