Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 41–42

УДК 517.95

ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ ДЛЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

© У. У. Абылкаиров*, С. Е. Айтжанов

* UAbylkairov@kazsu.kz

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

В работе рассматривается обратная нестационарная задача магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости, в которой, надо найти скорость движения $\vec{v}(x,t)$, магнитная напряженность $\vec{H}(x,t)$, градиент давления $\nabla p(x,t)$, но и внешние силы $\vec{f}(x)$ и токи $\mathrm{rot}\vec{j}(x)$. При этом к условиям составляющим прямую задачу, добавляются условия переопределения.

В работах [1–4] исследованы обратные задачи для системы уравнений Навье – Стокса с финальным переопределением.

Рассмотрим в цилиндре $Q_T = \Omega \times [0,T],\ \Omega \subset R^2$ обратную задачу магнитной гидродинамики

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{2} v_k \vec{v}_{x_k} - \frac{\mu}{\rho}\sum_{k=1}^{2} H_k \vec{H}_{x_k} - \nu\Delta\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\left(p + \frac{\mu\vec{H}^2}{2}\right) + g(x,t)\vec{f}(x), \tag{1}$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \frac{1}{\sigma\mu}\mathrm{rotrot}\vec{H} - \mathrm{rot}\left[\vec{v}\times\vec{H}\right] = \frac{\xi(x,t)}{\sigma\mu}\mathrm{rot}\vec{j}(x)\,, \tag{2}$$

$$\mathrm{div}\vec{v} = 0, \quad \mathrm{div}(\mu\vec{H}) = 0, \tag{3}$$

начальные условия

$$\vec{v}(x,0) = \vec{v}_0(x),\ \ \vec{H}(x,0) = \vec{H}_0(x), \tag{4}$$

граничные условия

$$\vec{v}|_S = 0, \quad H_n = 0 \quad \left.\frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2}\right|_S = j|_S = 0, \tag{5}$$

условия переопределения

$$\vec{v}(x,T) = \vec{U}(x),\ \vec{H}(x,T) = \vec{\Psi}(x),\ \nabla p(x,T) = \nabla\pi(x). \tag{6}$$

Введенные операторы T_g и S_ξ определены корректно, так как нужные дифференциальные свойства для $\vec{v}(x,t)$, $\vec{H}(x,t)$ и $p(x,t)$ гарантированы теорией разработанных в работе О. А. Ладыженской и В. А. Солонникова [5].

Зафиксируем функции $g = g(x,t)$ и $\xi(x,t)$, определим нелинейные операторы $T_g:\ L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$, $S_\xi:\ L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ следующими соотношениями

$$\begin{aligned} \left(T_g\vec{f}\right)(x) &= \vec{v}_t(x,T), \\ \left(S_\xi\vec{r}\right)(x) &= \vec{H}_t(x,T), \end{aligned} \tag{7}$$

где $r = \mathrm{rot}\vec{j}(x)$, $\vec{f} = \vec{f}(x)$, а $\vec{v}(x,t)$ и $\vec{H}(x,t)$ решение прямой задачи (1)–(5) с $\vec{f} = g(x,t)\vec{f}(x)$, $\mathrm{rot}\vec{j} = \xi(x,t)\mathrm{rot}\vec{j}(x)$.

Предположим, что $g(x,T) \neq 0$ и $\xi(x,T) \neq 0$ для всех $x \in \Omega$, другой нелинейный оператор $A:\ L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ и $B:\ L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$, введем с помощью следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \left(A\vec{f}\right)(x) &= \frac{1}{g(x,T)}\left(T_g\vec{f}\right)(x), \\ \left(B\vec{r}\right)(x) &= \frac{\sigma\mu}{\xi(x,T)}\left(S_\xi\vec{r}\right)(x). \end{aligned} \tag{8}$$

Тем самым, если $g(x,t)\vec{f}(x) \in L_2(Q_T)$, $g_t(x,t)\vec{f}(x) \in L_{2,1}(Q_T)$ и $\xi(x,t)\mathrm{rot}\vec{j}(x) \in L_2(Q_T)$, $\xi_t(x,t)\mathrm{rot}\vec{j}(x) \in L_{2,1}(Q_T)$, дополнительно $g(x,t)$, $g_t(x,t) \in C\left(\bar{Q}_T\right)$, $\xi(x,t)$, $\xi_t(x,t) \in C\left(\bar{Q}_T\right)$, то уравнении (1) и (2) и в терминах введенных операторов (7), (8) искомая обратная задача примет следующий вид:

$$A\vec{f} + \vec{\aleph} = \vec{f}, \tag{9}$$

$$B\vec{r} + \vec{\lambda} = \vec{r}, \tag{10}$$

где $\vec{\aleph} = \frac{1}{g(x,T)}\left[-\nu\Delta\vec{U} + U_k\vec{U}_{x_k} - \frac{\mu}{\rho}\Psi_k\vec{\Psi}_{x_k} + \frac{1}{\rho}\nabla\left(\pi + \frac{\mu\vec{\Psi}^2}{2}\right)\right]$,

$$\vec{\lambda} = \frac{\sigma\mu}{\xi(x,T)}\left[\frac{1}{\sigma\mu}\mathrm{rotrot}\vec{\Psi} - \mathrm{rot}\left(\vec{U}\times\vec{\Psi}\right)\right].$$

Теорема 1. *Пусть* $\Omega \subset R^2$, g, $g_t \in C\left(\bar{Q}_T\right)$, ξ, $\xi_t \in C\left(\bar{Q}_T\right)$, $|g(x,t)| \geq g_T > 0$, $|\xi(x,t)| \geq \xi_T > 0$ *при* $x \in \Omega$, $\vec{U}(x) \in W_2^2(\Omega) \cap H(\Omega)$, $\vec{\Psi}(x) \in W_2^2(\Omega) \cap H(\Omega)$, $\nabla\pi(x) \in G(\Omega)$.

Тогда операторы A *и* B *вполне непрерывны из* $L_2(\Omega)$ *в* $L_2(\Omega)$.

Теорема 2. *Если* g, $g_t \in C\left(\bar{Q}_T\right)$, ξ, $\xi_t \in C\left(\bar{Q}_T\right)$, $|g(x,T)| \geq g_T > 0$ *и* $|\xi(x,T)| \geq \xi_T > 0$ *при* $x \in \Omega$, $\vec{U} \in W_2^2(\Omega) \cap H(\Omega)$, $\vec{\Psi} \in W_2^2(\Omega) \cap H(\Omega)$, $\nabla\pi \in G(\Omega)$, $\vec{v}_0$, $\vec{H}_0 \in W_2^2(\Omega) \cap H(\Omega)$. *Пусть справедливы неравенства*

$$\nu > c_1\left(\left\|\vec{U}\right\|_{4,\Omega} + \frac{\mu}{\rho}\left\|\vec{\Psi}\right\|_{4,\Omega}\right), \quad \frac{1}{\sigma} > \mu c_1\left(\left\|\vec{U}\right\|_{4,\Omega} + \left\|\vec{\Psi}\right\|_{4,\Omega}\right).$$

Тогда для разрешимости задачи (1)–(6) необходима и достаточна разрешимость уравнении (9)–(10) в $L_2(\Omega)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абылкаиров У. У.* Обратная задача для уравнения Навье – Стокса // Условно-корректные задачи математической физики. Тезисы Всесоюзной конференции (2–6 октября 1989, Алма-Ата). Красноярск, 1989. С. 6.
2. *Абылкаиров У. У.* Обратная задача для уравнения Навье – Стокса // 7th Czecho \ -slovac Conference on Differential Equations and Their Application (EQADIFF7). Praha, 1989. C. 1–2.
3. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Method for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics // Monograths and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. V. 231. Marcel Dekker, 2000.
4. *Васин И. А.* Постановка и исследования некоторых обратных задач для системы уравнений Навье – Стокса // Условно-корректные задачи математической физики. Тезисы Всесоюзной конференции (2–6 октября 1989, Алма-Ата). Красноярск, 1989. С. 30.
5. *Ладыженская О. А. Солонников В. А.* Решение некоторых нестационарных задач магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости // Труды МИАН СССР. 1960. Т. 59. С. 115–173.