

УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

© У. У. Абылкаиров*, Ш. С. Сахаев, Х. Хомпыш

* UAbylkairov@kazsu.kz

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Рассмотрим в цилиндре $Q_T = \Omega \times [0, T]$ следующую двумерную задачу, где $\Omega \in R^2$ ограниченная область, $t \in [0, T]$, $x = (x_1, x_2) \in \Omega$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \sum_{\kappa=1}^3 v_{\kappa} \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_{\kappa}} - \frac{\mu}{\rho} \sum_{\kappa=1}^3 H_{\kappa} \frac{\partial \vec{H}}{\partial x_{\kappa}} - \nu \Delta \vec{v} - \chi \frac{\partial \Delta \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \text{grad} \left(p + \frac{\mu \vec{H}^2}{2} \right) = \vec{f}(x, t) \quad (1)$$

$$\text{div } \vec{v} = 0 \quad (2)$$

$$\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \frac{1}{\sigma} \text{rot rot } \vec{H} - \text{rot}[\vec{v}, \vec{H}] = \frac{1}{\sigma} \text{rot } \vec{j} \quad (3)$$

$$\text{div}(\mu \vec{H}) = 0 \quad (4)$$

граничные условия

$$\vec{v}|_S = 0, \quad \vec{H}_n|_S = 0, \quad \text{rot}_{\tau} \vec{H}|_S = 0, \quad (5)$$

и начальные условия

$$\vec{v}|_{t=0} = \vec{v}_0(x), \quad \vec{H}|_{t=0} = \vec{H}_0(x). \quad (6)$$

Здесь \vec{v} — скорость жидкости, \vec{H} — магнитная напряженность, p — давление, \vec{f} и \vec{j} соответственно внешние гидродинамические силы и токи, $\chi, \mu, \sigma, \rho, \nu$ — константы.

На протяжении всей работы мы будем использовать обозначения функциональных пространств и нормы в этих пространствах принятые в [1, 2]. Исследование уравнений движения жидкостей Кельвина – Фойгта регуляризирующую систему Навье – Стокса показано в работах [3, 4], а уравнений магнитной гидродинамики для вязкой жидкости в [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Обобщенным решением задачи (1)–(6) называются пара векторов $\vec{v}(x, t) \in \mathring{J}_1(Q_T)$, $\vec{H}(x, t) \in \mathring{N}(Q_T)$ которые удовлетворяют следующим условиям:*

$\vec{v}(x, t)$ имеет в Q_T обобщенные производные $\vec{v}_x, \vec{v}_t, \vec{v}_{xt} \in L_2(Q_T)$,

$\vec{H}(x, t)$ имеет в Q_T обобщенные производные $\vec{H}_x, \vec{H}_t, \vec{H}_{xt} \in L_2(Q_T)$ и удовлетворяют начальным условиям (6) и интегральным тождествам:

$$\int_0^T \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \phi - v_{\kappa} \vec{v} \frac{\partial \phi}{\partial x_{\kappa}} + \frac{\mu}{\rho} H_{\kappa} \vec{H} \frac{\partial \phi}{\partial x_{\kappa}} + \nu \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_{\kappa}} \frac{\partial \phi}{\partial x_{\kappa}} + \chi \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x_{\kappa} \partial t} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_{\kappa}} - \vec{f} \phi \right) dx dt = 0$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} \left(\mu \vec{H}_t \psi + \left[1/\sigma (\text{rot } \vec{H}) - \mu [v_1 H_2 - v_2 H_1] - \vec{j}/\sigma \right] (\text{rot } \psi) \right) dx dt = 0$$

для любых $\phi(x, t) \in W_2^{1,0}(Q_T) \cap \overset{\circ}{J}_1(Q_T)$ и $\psi(x, t) \in W_2^{1,0}(Q_T) \cap \aleph(Q_T)$.

Теорема. Если $\vec{f}, \vec{f}_t \in L_{2,1}(Q_T)$, $j, j_t \in L_2(Q_T)$ и $\vec{v}_0(x) \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{J}_1(\Omega)$, $\vec{H}_0(x) \in W_2^2(\Omega) \cap \aleph(\Omega)$ то задача (1)–(6) имеет единственное обобщенное решение в цилиндре Q_T и справедлива оценка

$$\rho \|\vec{v}_t\|_{2,\Omega}^2 + \chi \rho \|\vec{v}_{xt}\|_{2,\Omega}^2 + \mu \|\vec{H}_t\|_{2,\Omega}^2 + \int_0^T \left(\nu \rho \|\vec{v}_{xt}\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{\sigma} \|\text{rot} \vec{H}_t\|_{2,\Omega}^2 \right) d\tau < const.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
2. *Ладыженская О. А. Солонников В. А.* Решение некоторых нестационарных задач магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости // Труды МИАН СССР. 1960. Т. 59. С. 115–173.
3. *Осколков А. П.* О некоторых модельных нестационарных системах в теорий неньютоновских жидкостей // Записки науч. сем. ЛОМИ. 1979. Т. 84. С. 185–210.
4. *Осколков А. П., Шадиев Р. Д.* Нелокальные проблемы теории уравнений движения жидкостей Кельвина – Фойгта // Записки науч. сем. ЛОМИ. 1990. Т. 181. С. 145–185.