УДК 519.6

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ С ЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИОНАЛАМИ

© С. А. Айсагалиев, А. А. Кабидолданова

aisagaliev@kazsu.kz, kabasem@mail.ru

Институт математики и механики КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Постановка задачи. Рассматривается следующая задача оптимального управления: минимизировать функционал

$$J(u(\cdot), x_0, x_1) = \int_{t_0}^{t_1} [a_0^*(t)x(t) + b_0^*(t)u(t) + c_0^*(t)x_0 + d_0^*(t)x_1] dt \rightarrow \inf \quad (1)$$

при условиях

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u(t) + C(t)x_0 + D(t)x_1 + \mu(t), \quad t \in I = [t_0, t_1], \quad (2)$$

$$(x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1) = (x_0, x_1) \in S_0 \times S_1 = S \subseteq R^{2n}, \quad (3)$$

$$x(t) \in G(t) : G(t) = \{x \in R^n | \omega(t) \leq L(t)x + \bar{\mu}_1(t) \leq \varphi(t), t \in I\}, \quad (4)$$

$$g_j(u, x_0, x_1) \leq c_j, \quad j = \overline{1, m_1}, \quad g_j(u, x_0, x_1) = c_j, \quad j = \overline{m_1 + 1, m_2}, \quad (5)$$

$$g_j(u, x_0, x_1) = \int_{t_0}^{t_1} [a_j^*(t)x(t) + b_j^*(t)u(t) + c_j^*(t)x_0 + d_j(t)^*x_1] dt, \quad j = \overline{1, m_2}, \quad (6)$$

$$u(t) \in U(t) = \{u(\cdot) \in L_2(I, R^m) | u(t) \in \bar{V}(t) \subset R^m \text{ п. в. } t \in I\}. \quad (7)$$

Полагаем, что $a_j(t)$, $b_j(t)$, $c_j(t)$, $d_j(t)$, $j = \overline{0, m_2}$ — кусочно-непрерывные вектор-функции порядков $n \times 1$, $m \times 1$, $n \times 1$, $n \times 1$ соответственно, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ матрицы с кусочно-непрерывными элементами соответственно порядков $n \times n$, $n \times m$, $n \times n$, $n \times n$, $\mu(t) = (\mu_1(t), \dots, \mu_n(t))$, $t \in I$ — кусочно-непрерывная вектор-функция, $L(t)$ — матрица порядка $s \times n$ с кусочно-непрерывными элементами, $\bar{\mu}_1(t) = (\bar{\mu}_{11}(t), \dots, \bar{\mu}_{1s}(t))$, $t \in I$ — кусочно-непрерывная вектор-функция, c_j , $j = \overline{1, m_2}$ — заданные числа, $x_0 \in S_0$, $x_1 \in S_1$, где S_0 , S_1 — заданные выпуклые замкнутые множества, моменты времени t_0 , t_1 — фиксированы, $\omega(t) = (\omega_1(t), \dots, \omega_s(t))$, $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_s(t))$, $t \in I$ — заданные непрерывные функции.

Ставятся следующие задачи:

ЗАДАЧА 1. Найти необходимые и достаточные условия существования решения задачи оптимального управления (1)–(7), т.е. найти необходимые и достаточные условия существования решения краевой задачи (2)–(7).

ЗАДАЧА 2. Найти допустимое управление для задачи (1)–(7).

ЗАДАЧА 3. Найти оптимальное управление $u_{**}(t) \in U$, оптимальную траекторию $x_{**}(t) \in G(t)$, начальную точку $x_0^{**} \in S_0$ и конечное состояние $x_1^{**} \in S_1$, доставляющие минимум функционалу (1) при условиях (2)–(7).

Основой предлагаемого метода является — принцип погружения. Принцип погружения следует из общего решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода [1–3].

Принцип погружения. Задача оптимального управления (1)–(7) разрешима тогда и только тогда, когда существует хотя бы одно допустимое управление. Каждое допустимое управление является решением краевой задачи (2)–(7). Согласно принципу погружения задача (2)–(7) равносильна следующей оптимизационной задаче со свободным правым концом траектории: минимизировать функционал

$$J_1(\theta(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \left[|v_1(t) + B_1^*(t)\Phi^*(t_0, t)T^{-1}(t_0, t_1)a + N_{11}(t)z(t_1, v) - u(t)|^2 + |v_2(t) + C_1^*(t)\Phi^*(t_0, t)T^{-1}(t_0, t_1)a + N_{12}(t)z(t_1, v) - x_0|^2 + |v_3(t) + D_1^*(t)\Phi^*(t_0, t)T^{-1}(t_0, t_1)a + N_{13}(t)z(t_1, v) - x_1|^2 + |p(t) - L(t)P_1[z(t) + \Lambda_2(t) + N_2(t)z(t_1, v)] - \bar{\mu}_1(t)|^2 \right] dt \rightarrow \inf, \quad (8)$$

$$\dot{z} = A_1(t)z + B_1(t)v_1(t) + C_1(t)v_2(t) + D_1(t)v_3(t), \quad z(t_0) = 0, \quad t \in I, \quad (9)$$

$$v_1(\cdot) \in L_2^\rho(I, R^m), \quad v_2(\cdot) \in L_2^\rho(I, R^n), \quad v_3(\cdot) \in L_2^\rho(I, R^n), \quad (10)$$

$$(x_0, x_1) \in S_0 \times S_1 = S, \quad u(t) \in U(t), \quad p(t) \in V(t), \quad d \in \Gamma^\rho = \{d \in R^n \mid |d| \leq \rho, \quad d \geq 0\}, \quad (11)$$

где $q(t) = (z(\cdot), z(t_1), \theta(t))$, $t \in I$, $\theta(t) = (z(\cdot), z(t_1), u(\cdot), p(\cdot), v(\cdot), x_0, x_1, d)$, матрицы $A_1(t)$, $B_1(t)$, $N_1(t)$, $C_1(t)$, $D_1(t)$, $N_2(t)$, вектор a и вектор-функция $\Lambda_2(t)$ определяются по исходным данным системы. Матрица $T(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)B_2(t)B_2^*(t)\Phi^*(t_0, t)dt$, где $B_2(t) = (B_1(t), C_1(t), D_1(t))$, $\Phi(t, \tau) = \theta(t)\theta^{-1}(\tau)$, $\theta(t)$ — фундаментальная матрица решений системы $\dot{x} = A_1(t)x$.

Теорема. Пусть матрица $T(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_0, t)B_2(t)B_2^*(t)\Phi^*(t_0, t)dt$ положительно определена. Для того, чтобы задача оптимального управления (1)–(7) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы значение $J_1(\theta_*) = J_1(z(\cdot), z(t_1), \theta_*(\cdot)) = 0$, где θ_* — оптимальное управление в задаче (8)–(11).

Допустимое управление. Рассмотрим решение задачи 2. Как следует из теоремы, допустимое управление для задачи оптимального управления (1)–(7) может быть построено путем решения задачи (8)–(11). Заметим, что если $J_1(\theta_*) = 0$, $\theta_*(t) = (u_*(t), p_*(t), v_*(t), x_0^*, x_1^*, d_*)$ то $(u_*(t), x_0^*, x_1^*) \in U \times S_0 \times S_1$ — допустимое управление для задачи (1)–(7). Значение нижней грани для оптимизационной задачи (8)–(11) определяется на основе построения минимизирующих последовательностей по правилу:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= P_U[u_n - \alpha_n J'_{11}(\theta_n)], & p_{n+1} &= P_V[p_n - \alpha_n J'_{12}(\theta_n)], \\ v_1^{n+1} &= P_{L_2^\rho}[v_1^n - \alpha_n J'_{13}(\theta_n)], & v_2^{n+1} &= P_{L_2^\rho}[v_2^n - \alpha_n J'_{14}(\theta_n)], \\ v_3^{n+1} &= P_{L_2^\rho}[v_3^n - \alpha_n J'_{15}(\theta_n)], & x_0^{n+1} &= P_{S_0}[x_0^n - \alpha_n J'_{16}(\theta_n)], \\ x_1^{n+1} &= P_{S_1}[x_1^n - \alpha_n J'_{17}(\theta_n)], & d_{n+1} &= P_{\Gamma^\rho}[d_n - \alpha_n J'_{18}(\theta_n)], \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где $0 < \varepsilon_0 \leq \alpha_n \leq \frac{2}{l + 2\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, $l = \text{const} > 0$ — постоянная Липшица для градиента функционала (8) при условиях (9)–(11).

Оптимальное управление. Оптимальное управление для исходной задачи (1)–(7) строится путем сужения области допустимых управлений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айсагалиев С. А. Управляемость некоторой системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27, № 9. С. 1476–1486.
2. Айсагалиев С. А. Оптимальное управление линейными системами с закрепленными концами траектории и ограниченным управлением // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32, № 6. С. 1–7.
3. Айсагалиев С. А. Общее решение одного класса интегральных уравнений // Математический журнал. 2005. № 4. С. 3–10.