Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 47–48

УДК 517.956

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИИ РИМАНА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© А. В. Аксенов

aksenov@mech.math.msu.su

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

Введение. В работе [1], применительно к частному гиперболическому уравнению второго порядка с двумя независимыми переменными, Б. Риман предложил "метод интегрирования Римана". Для применения метода необходимо построить функцию Римана, являющуюся решением специальной характеристической задачи Коши. Общего метода построения функции Римана не существует. В работе [2] дан подробный анализ шести известных способов построения функции Римана для частных типов уравнений. Н. Х. Ибрагимовым [3], на основе использования результатов Л. В Овсянникова по групповой классификации однородных гиперболических уравнений второго порядка [4], было предложено находить функцию Римана с помощью симметрий уравнения.

В настоящей работе показана инвариантность функции Римана относительно симметрий фундаментальных решений и предложен метод ее построения.

1. Метод Римана. Рассмотрим общее линейное гиперболическое уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

$$L[u] = u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y)\,. \tag{1}$$

Метод Римана сводит задачу интегрирования уравнения (1) к построению вспомогательной функции Римана $v = R(x,y;x',y')$, удовлетворяющей однородному сопряженному уравнению

$$L^*[R] = R_{xy} - (aR)_x - (bR)_y + cR = 0$$

и следующим условиям на характеристиках:

$$(R_y - aR)|_{x=x'} = 0\,, \qquad (R_x - bR)|_{y=y'} = 0\,, \qquad R(x',y';x',y') = 1\,.$$

С помощью функции Римана для уравнения (1) строятся общие решения задачи Коши и характеристической задачи Коши (задачи Гурса).

Функция Римана обладает следующим свойством взаимности

$$R^*(x,y;x',y') = R(x',y';x,y)\,, \tag{2}$$

где $R^*(x,y;x',y')$ — функция Римана сопряженного уравнения.

2. Симметрии фундаментальных решений. Пусть дано линейное дифференциальное уравнение с частными производными p-го порядка

$$Mu = \sum_{|\alpha|=0}^{p} A_\alpha(x)\, D^\alpha u = 0\,, \qquad x \in R^m\,. \tag{3}$$

Фундаментальные решения уравнения (3) являются решениями уравнения

$$Mu = \delta(x - x_0)\,. \tag{4}$$

Операторы симметрии уравнения (3), образующие конечномерную часть алгебры Ли оператор симметрии, имеют вид

$$X=\sum_{i=1}^{m}\xi^i(x)\,\frac{\partial}{\partial x^i}+\zeta(x)\,u\,\frac{\partial}{\partial u}\,. \tag{5}$$

Обозначим через $\underset{p}{X}$ продолжение порядка p оператора (5). Функция $\lambda=\lambda(x)$ удовлетворяет тождеству $\underset{p}{X}(Mu)=\lambda(x)\,Mu$.

Сформулируем основной результат работы [5].

Теорема 1. *Алгебра Ли операторов симметрии уравнения (4) является подалгеброй алгебры Ли операторов симметрии уравнения (3), выделяемой соотношениями*

$$\xi^i(x_0)=0,\qquad \lambda(x_0)+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\xi^i(x_0)}{\partial x_0^i}=0,\qquad i=1,\ldots,m\,. \tag{6}$$

Симметриями фундаментальных решений (или симметриями уравнения (4)) будем называть симметрии уравнения (3), удовлетворяющие соотношениям (6).

3. Основной результат работы. Можно показать, что операторы симметрии однородного уравнения (1) имеют вид

$$X=\xi^1(x)\,\frac{\partial}{\partial x}+\xi^2(x)\,\frac{\partial}{\partial y}+\zeta(x,y)\,u\,\frac{\partial}{\partial u}\,,$$

и находятся из системы определяющих уравнений.

Рассмотрим уравнение

$$Lu=\delta(x-x')\,\delta(y-y')\,.$$

Симметрии фундаментальных решений удовлетворяют дополнительным соотношениям

$$\xi^1(x')=0\,,\qquad \xi^2(y')=0\,,\qquad \lambda(x',y')+\frac{d\,\xi^1(x')}{d\,x}+\frac{d\,\xi^2(y')}{d\,y}=0\,. \tag{7}$$

Функция Римана $u=R^*(x,y;x',y')$ сопряженного уравнения $L^*v=g(x,y)$ является решением соответствующей характеристической задачи Коши. Тогда из соотношений (7) и системы определяющих уравнений следует инвариантность условий на характеристиках.

Теорема 2. *Симметрии фундаментальных решений линейного гиперболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными оставляют инвариантной функцию Римана сопряженного уравнения.*

Из теоремы 2 следует, что функция Римана сопряженного уравнения является инвариантным относительно симметрий фундаментальных решений решением исходного уравнения. Тогда функция Римана исходного уравнения находится из соотношения взаимности (2).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 05-01-00375 и 06-01-00707) и гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4474.2006.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Риман Б.* О распространении плоских волн конечной амплитуды // В кн.: Риман Б. Сочинения. М.–Л.: ОГИЗ. 1948. С. 376–395.
2. *Copson E. T.* On the Riemann – Green Function // Archive for Ratioanal Mechanics and Analysis. 1957/58. V. 1. P. 324–348.
3. *Ибрагимов Н. Х.* Опыт группового анализа. М.: ”Знание”. Сер. ”Математика и кибернетика”. № 7. 1991. 48 с.
4. *Овсянников Л. В.* Групповые свойства уравнения С. А. Чаплыгина // Журнал прикладной механики и технической физики. 1960. № 3. С. 126–145.
5. *Аксенов А. В.* Симметрии линейных уравнений с частными производными и фундаментальные решения // Доклады АН. 1995. Т. 342, № 2. С. 151–153.