Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 49–50

УДК 517.9

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

© А. Ш. Акыш

akysh_abdigali@mail.ru

Институт математики ЦФМИ МОН РК, Алматы, Казахстан

Уравнение Больцмана для функции распределения $f = f(t, x, v)$ ($t \in (0, T]$, $T < \infty$, $x \in G = [0, 1]^3$, $v \in R_3$), молекул сфер с радиусом χ записывается в виде [1]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (v, grad f) = \mathbf{J}(f) - f\mathbf{S}(f) \equiv \mathbf{B}(f, f), \tag{1}$$

$$\text{где} \quad \mathbf{J}(f) = \int\limits_{R_3 \times \Sigma} f' f_1' g(\theta, W) d\sigma dv_1, \quad \mathbf{S}(f) = \int\limits_{R_3 \times \Sigma} f_1 g(\theta, W) d\sigma dv_1,$$

$$g(\theta, W) = 0.25\chi^2 \mid W \mid \sin(2\theta), \; f_1 = f(t, x, v_1), \quad f' = f(t, x, v'), \quad f_1' = f(t, x, v_1');$$

$(v, v_1;\ v', v_1')$ — соответственно векторы скорости двух сталкивающихся молекул до и после столкновения; $W = v_1 - v$ — вектор относительной скорости; $v' = v + \beta(\beta, W)$, $v_1' = v_1 - \beta(\beta, W)$; β — единичный вектор в направлении рассеяния молекул.

Для уравнения (1) рассматривается задача Коши с начальным и периодическим граничными условиями

$$f(t, x, v)\Big|_{t=0} = \varphi(x, v); \quad f(t, x, v)\Big|_{\Gamma_{0x_\alpha}} = f(t, x, v)\Big|_{\Gamma_{1x_\alpha}}, \; \Gamma_{\rho x_\alpha} - \text{граница } G. \tag{2}$$

Начальная функция $\varphi(x, v)$ неотрицательна и непрерывна в $G \times R_3$ и

$$\int\limits_{R_3} \mid v \mid^\gamma \|\varphi(v)\| dv = A_\gamma < \infty; \quad \gamma = 0, 2; \quad \| \varphi(v) \| = \sup_{x \in G} \varphi(x, v). \tag{3}$$

Задача (1)–(2) решается с помощью следующей схемы метода расщепления:

$$\frac{f^{n+1/5} - f^n}{\tau} = -f^{n+1/5}\mathbf{S}(f^{n+1/5}), \quad \frac{f^{n+2/5} - f^{n+1/5}}{\tau} = \mathbf{J}(f^{n+1/5}), \tag{4}$$

$$\frac{f^{n+(\alpha+2)/5} - f^{n+(\alpha+1)/5}}{\tau} + \xi_\alpha \frac{\partial f^{n+(\alpha+2)/5}}{\partial x_\alpha} = 0, \; \alpha = \overline{1, 3}, \tag{5}$$

с начально-граничным условием (2).

Для решения задачи (4), (5), (2) с использованием преобразование Карлемана интеграла столкновений из [1, стр. 33] получены оценки:

$$\|f^{n+2/5}(v)\| \leqslant \|f^n(v)\| + 2\tau \int\limits_{R_3} \frac{\|f^n(v')\|}{\rho_{vv'}} \int\limits_{E_{vv'}} \|f^n(q)\| dq dv', \tag{6}$$

$$\| f^{n+(\alpha+2)/5}(v) \| \leqslant \| f^{n+(\alpha+1)/5}(v) \|, \; \alpha = \overline{1, 3}; \quad \forall v \in R_3, \tag{7}$$

где $E_{vv'}$ — бесконечная плоскость, dq — элемент площади на $E_{vv'}$, $\rho_{v'v}$ — расстояние между v и v'.

Далее, учитывая условия (3) на начальную функцию, найдены оценки:

$$\int_{R_3} |\, v\,|^\gamma \parallel f^{n+\alpha/5}(v) \parallel dv \leqslant \int_{R_3} |\, v\,|^\gamma \parallel \varphi(v) \parallel dv = A_\gamma, \alpha = \overline{1,5};\ \gamma = 0, 2.$$

$$\int_{R_3} \frac{1}{\rho_{v'v}} \|f^{n+1}(v)\| dv \leqslant \int_{R_3} \frac{1}{\rho_{v'v}} \|\varphi(v)\| dv + 4\pi T A_0^2 \equiv A_3,$$

$$\int_{E_{v'v}} \parallel f^{n+1}(q) \parallel dq \leqslant \int_{E_{v'v}} \parallel \varphi(q) \parallel dq + \pi T A_0^2 \equiv A_4.$$

Тогда из неравенств (6), (7) следует оценка

$$\parallel f^{n+1}(x,v) \parallel_{\mathbf{C}(G\times R_3)} \leqslant \parallel \varphi(x,v) \parallel_{\mathbf{C}(G\times R_3)} + T A_3 A_4.$$

Для разности $U = \big(f(t,x,v) - F(t,x,v)\big) \in \mathbf{C}(Q)$ двух решений задачи (1), (2) установлено соотношение

$$\frac{d}{dt}\int_{R_3} \parallel U(t,v) \parallel dv = 0, \quad \text{что и равносильно} \quad U(t,x,v) \equiv 0.$$

В [3] доказано, что предельная неотрицательная функция $f(t,x,v)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$f(t,x,v) = \varphi(x-vt,v)\exp\Big\{-\int_0^t \mathbf{S}\big(f(s,x-v(t-s),v)\big)ds\Big\} +$$
$$\int_0^t \mathbf{J}\big(f(t',x-v(t-t'),v)\big)\exp\Big\{-\int_{t'}^t \mathbf{S}\big(f(s,x-v(t-s),v)\big)ds\Big\}dt'$$

и является слабым решением задачи (1)–(2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карлеман Т.* Математические задачи кинетической теории газов. М.: ИЛ, 1960. 150 с.
2. *Годунов С. К., Султангазин У. М.* О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана // Успехи мат. наук. 1971. Т. 36, № 3. С.3–51.
3. *Акыш А. Ш.* О нелинейном уравнении Больцмана // Математический журнал. Алматы, 2002. Т. 2, № 1, С. 10–16.