Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 51–52

УДК 517.956

КРИТЕРИЙ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ДАРБУ – ПРОТТЕРА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© С. А. Алдашев

serik@aldash.vicc.kz

Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы, Казахстан

Задачи Дарбу на плоскости для линейных гиперболических уравнений хорошо изучены [1, 2]. Многомерные аналоги этих задач для волнового уравнения предложены М. Н. Проттером [3]. Из-за отсутствия эффективных методов исследования изучение задач Дарбу – Проттера для многомерных гиперболических уравнений требует специальных исследований и привлечения новых методов, поэтому в этом направлений мало работ (см. [4]).

Пусть D_ε — конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,\ldots,x_m,t)$, ограниченная поверхностями, и плоскостью $t=0$, где $|x|$ — длина вектора $x=(x_1,\ldots,x_m), 0\le t\le(1-\varepsilon)/2$, а $0\le\varepsilon<1$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_ε области D_ε, обозначим через S_ε, S_1 и S соответственно.

В области D_ε рассмотрим многомерные гиперболические уравнения

$$\Delta_x u-u_{tt}+\sum_{i=1}^{m}a_i(x,t)u_{x_i}+b(x,t)u_t+c(x,t)u=0, \tag{1}$$

$$\Delta_x\vartheta-\vartheta_{tt}-\sum_{i=1}^{m}a_i\vartheta_{x_i}-b\vartheta_t+d\vartheta=0, \tag{2}$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1,\ldots,x_m$, $m\ge2$, $d(x,t)=c-\sum\limits_{i=1}^{m}a_iu_{x_i}-b_t$.

Рассмотрим следующие взаимно-сопряженные задачи

Задача 1. Найти в области D_ε решение уравнения (1) из класса $C^1(\overline{D_\varepsilon})\bigcap C^2(D_\varepsilon)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_S=\tau_\varepsilon(x),\quad u|_{S_\varepsilon}=\sigma_\varepsilon(x),$$

или

$$u_t|_S=\nu_\varepsilon(x),\quad u|_{S_\varepsilon}=\sigma_\varepsilon(x).$$

Задача 2. Найти в области D_ε решение уравнения (2) из класса $C^1(\overline{D_\varepsilon})\bigcap C^2(D_\varepsilon)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\vartheta|_S=\tau_\varepsilon(x),\quad \vartheta|_{S_t}=\sigma_1(x),$$

или

$$\vartheta_t|_S=\nu_\varepsilon(x),\quad \vartheta|_{S_t}=\sigma_1(x).$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1,\ldots,x_m,t$ к сферическим $r,\theta_1,\ldots,\theta_{m-1},t$.

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка $n, 1\le k\le k_n, (m-2)!n!k_n=(n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_{m-1})$, $W_2^l(D_\varepsilon)$, $l=0,1,\ldots$ — пространства Соболева, а $\tilde S=\{(r,\theta)\in S,\varepsilon<r<(1+\varepsilon)/2\}$.

Имеет место ([5])

Лемма. *Пусть* $f(r,\theta)\in W_2^l(S)$. *Если* $l\geq m-1$, *то ряд*

$$f(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{k_n} f_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta),$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p\leq l-m+1$, *сходятся абсолютно и равномерно.*

Введем множество функций

$$B_1^l(S)=\{f(r,\theta): f\in W_2^l(S),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{k_n}\left(\|f_n^k(r)\|^2_{C^3(\varepsilon,1)}+\|f_n^k(r)\|^2_{C^1([\varepsilon,1])}\right)\exp 2(n^2+n(m-2))<\infty, l\geq m-1\}$$

Если $a_i(x,t),b(x,t),c(x,t)\in W_2^l(D_\varepsilon)$, $i=1,\ldots,m$, $l\geq m+1$ и $\tau_\varepsilon(r,\theta)=r^2\tau_\varepsilon^*(r,\theta)$, $\nu_\varepsilon(r,\theta)=r^2\nu_\varepsilon^*(r,\theta)$, $\sigma_\varepsilon(r,\theta)=r^2\sigma_\varepsilon^*(r,\theta)$, $\tau_\varepsilon^*(r,\theta),\nu_\varepsilon^*(r,\theta)\in B_1^l(S)$, $\sigma_\varepsilon^*(r,\theta)\in B_1^l(\tilde{S})$. Тогда из результатов работ [4, 6, 7] вытекает следующий критерий

Теорема. *Задача 1 однозначно разрешима* $\Leftrightarrow\varepsilon>0$.

Отметим, что в [8] получена критерии единственности решения задачи 1. В [9, 10] установлено, что задача 2 имеет единственное решение.

Замечание. В теореме принадлежность заданных функций в множество $B_1^l(S)$ существенна. Как показывают примеры построенные в [4], при нарушении этого условия, решение задачи 1 даже для многомерного волнового уравнения могут не существовать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
2. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
3. *Protter M. H.* // J. Rational Mech. and Analysis. 1954. V. 3, N 4. P. 435–446.
4. *Алдашев С. А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы: Гылым, 1994. 254 с.
5. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 254 с.
6. *Алдашев С. А.* // Укр. матем. журнал. 1991. Т. 43, № 3. С. 415–420.
7. *Алдашев С. А., Нуржанов Ш. Т.* // Вестник КазГУ, сер. матем., мех., инф. Алматы, 1997. № 8. С. 6–16.
8. *Алдашев С. А.* // Математический журнал. 2002. Т. 2, № 4(6). С. 26–29.
9. *Алдашев С. А.* // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34, № 1. С. 64–68.
10. *Нуржанов Ш. Т.* // Задачи Дарбу – Проттера для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений. Дис :. канд. физ.-мат. наук. Алматы, 2000. 69 с.