Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 53–54

УДК 517.938

ОБ ОБОБЩЕННЫХ ПОКАЗАТЕЛЯХ ЛЯПУНОВА

© Т. М. Алдибеков

Tamash@kazsu.kz

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Теорема. *Пусть для системы*

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t)y_k, k = 1, \dots, n; \tag{1}$$

где коэффициенты непрерывные действительные функции определенные на полуоси $J = [0, +\infty)$, *для некоторой непрерывной положительной функции* $\psi(t)$ *на* J, *выполняются условия*

$$1)\ p_{k-1,k-1}(t) - p_{kk}(t) \geq \alpha\psi(t), \quad t \in J, \quad k \in \{2, \dots, n\}, \quad \alpha > 0, \quad \psi(t) \geq \beta > 0,$$

$$2)\ \lim_{t\to+\infty} \frac{|p_{ik}(t)|}{\psi(t)} = 0, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad k \in \{1, \dots, n\}, \quad i \neq k,$$

$$3)\ \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{q(t)} \int_0^t p_{kk}(\tau)d\tau = \lambda_k(q), \quad k = \overline{1, n},$$

где $q(t) = \int_0^t \psi(\tau)d\tau$ *тогда система* (1) *имеет фундаментальную систему решений*

$$\overline{y_1}, \overline{y_2}, \dots, \overline{y_n}$$

такую, что

$$\chi[\overline{y_k}, q] = \lambda_k(q), \quad k = \overline{1, n},$$

где $\chi[\overline{y_k}, q]$ *— обобщенный верхний показатель Ляпунова решения* $\overline{y_k}$, $k = \overline{1, n}$, *относительно* $q(t)$.

Доказательство. Легко установить, что существует фундаментальная система решений системы (1)

$$\overline{y_k} = \{y_{1k}, y_{2k}, \dots, y_{nk}\}, \quad k = \overline{1, n},$$

такое, что

$$a)\ \lim_{t\to+\infty} \frac{y_{ik}}{y_{kk}} = 0, \quad i \neq k,$$

$$b)\ \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{1}{\psi(t)} \frac{y'_{kk}}{y_{kk}} - \frac{p_{kk}(t)}{\psi(t)}\right) = 0,$$

$$c)\ \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{q(t)} \ln|y_{kk}(t)| = \chi[\overline{y_k}, q].$$

Отсюда и из условия теоремы получаем требуемое равенство. Теорема доказана.

Следствие 1. *Фундаментальная система решений* $\overline{y_1}, \overline{y_2}, \dots, \overline{y_n}$ *образует нормальный базис системы* (1), *т. е.* $\lambda_k(q)$, $k = \overline{1, n}.$ *являются обобщенными показателями системы* (1).

Следствие 2. *Если* $\lambda_1(q) < 0$, *то система* (1) *асимптотически устойчива.*

Замечание. Теорема является аналогом теоремы Перрона для системы дифференциальных уравнений с неограниченными коэффициентами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляпунов А. М.* Собрание сочинений. М – Л., 1956. Т. 2.
2. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М. – Л., 1949.
3. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложение к вопросам устойчивости. М., 1966.
4. *Изобов Н. А.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // В кн. Итоги науки и техники (Мат. анализ). М., 1974. Т. 12. С. 71–146.
5. *Алдибеков Т. М.* Аналог теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению // Дифференциальные уравнения.2006. Т. 42, № 6. С. 859–860.