

УДК 517.947.5

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ НА ПОЛУОСИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ С БЕСКОНЕЧНОЗОННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

© О. Р. Аллаберганов

Tulki70@mail.ru

Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан

В этой работе изучается обратная задача на полуоси для оператора Штурма – Лиувилля с бесконечнозонным потенциалом. Ранее аналогичные задачи исследовались в работах [1–4].

Рассмотрим на полуоси следующую граничную задачу

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < \infty, \quad (1)$$

$$y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0, \quad \alpha \in (0, \pi), \quad (2)$$

где $q(x)$ — бесконечнозонный потенциал (определение и обозначения см. в [4]).

Для задачи (1)–(2) функция Вейля – Титчмарша имеет вид $m_\alpha(\lambda) = (C(\lambda) + i\sqrt{f(\lambda)})/A(\lambda)$, где

$$f(\lambda) = \lambda \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k - \lambda}{\lambda_k} \cdot \frac{\mu_k - \lambda}{\lambda_k},$$

$$A(\lambda) = h(\lambda) \sin^2 \alpha + g(\lambda) \cos^2 \alpha + k(\lambda) \sin 2\alpha, \quad C(\lambda) = (h(\lambda) - g(\lambda)) \sin \alpha \cos \alpha + k(\lambda) \cos 2\alpha.$$

Из вида функции Вейля – Титчмарша вытекает, что непрерывный спектр задачи (1)–(2) состоит из следующего множества

$$E_{ess} = R^1 \setminus \left\{ (-\infty, 0) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} (\lambda_k, \mu_k) \right\}.$$

Обозначим через ξ_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, нули функции $A(\lambda)$. Используя теорему Руше, нетрудно показать, что $\xi_0 \in (-\infty, 0]$, $\xi_n \in [\lambda_n, \mu_n]$, $n = 1, 2, \dots$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Числа ξ_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, и знаки $\sigma_n = \text{sign } C(\xi_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, называются *спектральными параметрами задачи (1)–(2)*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Спектральные параметры ξ_n , σ_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, и границы $\lambda_0, \lambda_n, \mu_n$, $n = 1, 2, \dots$, непрерывного спектра назовем *спектральными данными задачи (1)–(2)*.

Восстановление коэффициента $q(x)$ и граничного условия задачи (1)–(2) по спектральным данным называют обратной задачей.

Теорема 1. Пусть ξ_n , σ_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, — спектральные параметры и E_{ess} непрерывный спектр задачи (1)–(2). Тогда непрерывный спектр следующей задачи

$$\begin{cases} -y'' + q(x+t)y = \lambda y, & 0 < x < \infty, \\ y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0, & \alpha \in (0, \pi), \end{cases} \quad (3)$$

не зависит от действительного параметра t и спектральные параметры $\xi_k(t)$, $k = 0, 1, \dots$, удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений Дубровина – Трубовица

$$\xi_0'(t) = \frac{-2[ctg^2 \alpha + \xi_0(t) - q(t)]\sigma_0(t)\sqrt{-f(\xi_0(t))}}{\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k(t) - \xi_0(t)}{\lambda_k}},$$

$$\xi'_n(t) = \frac{-2\lambda_n[ctg^2\alpha + \xi_n(t) - q(t)]\sigma_n(t)\sqrt{-f(\xi_n(t))}}{(\xi_0(t) - \xi_n(t)) \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\xi_k(t) - \xi_n(t)}{\lambda_k}}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

а также начальным условиям $\xi_k(0) = \xi_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Знак $\sigma_k(t)$ меняется при каждом столкновении $\xi_k(t)$ с границами своей лакуны ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Теорема 2. Имеют место следующие формулы:

$$ctg\alpha = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n \sqrt{-f(\xi_n)}}{A'_1(\xi_n)},$$

$$q(t) = 2ctg^2\alpha + 2\xi_0(t) - \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k + \mu_k - 2\xi_k(t)),$$

где

$$A_1(\lambda) = (\lambda - \xi_0) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k - \lambda}{\lambda_k}$$

и $\xi_k(t)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, — спектральные параметры задачи (3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахизер Н. И. Континуальный аналог ортогональных многочленов на системе интервалов // ДАН СССР. 1961. т. 141, № 2. с. 262–266.
2. Hochstadt H., Goldberg W. An inverse problem for a differential operator with a mixed spectrum // J. Math. Anal. and Appl. 1985. V. 105. P. 206–221.
3. Левитан Б. М., Савин А. В. Обратная задача на полупрямой для конечнозонных потенциалов // Вестн. Моск. ун-та, сер. 1, математика, механика. 1988. № 1. с. 21–28.
4. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма – Лиувилля. М.: Наука, 1984.