

УДК 517.9

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КООРДИНАТЕ

© П. С. Алешин

AlyoshinPavel@gmail.com

Орловский государственный университет, Орел

1. В области $D = D^+ \cup D^- \cup J$, где $D^+ = \bigcup_{l=0}^{\infty} D_l^+$, $D_l^+ = \{(x, y) : |x| < +\infty, lh \leq y \leq (l+1)h\}$, $D^- = \bigcup_{k=0}^{\infty} D_k^-$, $D_k^- = \{(x, y) : k\tau - y < x < (k+1)\tau + y, -\tau/2 < y < 0\}$, $J = \{(x, y) : 0 < x < +\infty, y = 0\}$, рассматривается уравнение

$$0 = \begin{cases} D_+^{2\alpha} u(s, y) - u_y(x, y) + H(y - h)u(x, y - h), & y > 0, \\ u_{xx}(x, y) - u_{yy}(x, y) - H(x - \tau)u(x - \tau, y), & y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

в котором $1 < 2\alpha < 2$; $0 < \tau, h \equiv \text{const}$; $D_+^{2\alpha}$ — оператор дробного (в смысле Римана — Лиувилля) интегродифференцирования с началом в $-\infty$ и с концом в точке x , действующий на функцию $u(x, y)$ по переменной x .

ЗАДАЧА P . Найти решение $u(x, y)$ уравнения (1) в области D из класса $D_+^{2\alpha-2}u(s, y) \in C(\overline{D^+})$, $D_+^{2\alpha}u(s, y) \in C(D^+)$, $u_y(x, y) \in C(\overline{D^-})$, $u_y(x, y) \in C(D^+)$, $u_{xx}(x, y), u_{yy}(x, y) \in C(D^-)$, удовлетворяющее граничным и начальным условиям

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \leq 0, \quad (2)$$

$$u(x, k\tau - x) = \psi_k(x), \quad k\tau \leq x \leq (2k+1)\tau/2, \quad (3)$$

и условиям сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow 0+} u(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0-} u(x, y) = \omega(x), \quad x \in \overline{J}, \quad (4)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0+} u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0-} u_y(x, y) = \nu(x), \quad x \in J, \quad (5)$$

если заданные функции $\psi_k(x) \in C[k\tau, (2k+1)\tau/2] \cap C^2(k\tau, (2k+1)\tau/2)$, $f(x) \in C(-\infty, 0] \cap C^2(-\infty, 0)$ и $f(-\infty) = 0$, $f(0) = \psi_0(0)$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \max_{x \in [k\tau, (2k+1)\tau/2]} |\psi_k(x)| = 0$.

2. Единственность и существование решения задачи P . Решение задачи Коши в области D^+ для уравнения (1) с начальными условиями (2), (4) получено в виде

$$u(x, y) = \left\{ u_l(x, y), (x, y) \in \overline{D_l^+} (l = 0, 1, 2, \dots) \right\}, \quad (6)$$

где

$$u_l(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\omega}(\xi) G_l(x - \xi, y) d\xi,$$

а

$$G_l(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^l \frac{(y - mh)^m}{m!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} e^{(i\lambda)^{2\alpha}(y-mh)} d\lambda,$$

$$\bar{\omega}(x) = \begin{cases} f(x), x \leq 0, \\ \omega(x), x \geq 0. \end{cases}$$

Решение задачи Коши в области D^- для уравнения (1) с начальными условиями (4), (5) найдено в форме

$$u(x, y) = \left\{ u_k(x, y), (x, y) \in \bar{D}_k^-(k = 0, 1, 2, \dots) \right\}, \quad (7)$$

где $u_k(x, y) = \Phi(x, y)H(x) + \sum_{m=1}^k \gamma_m H(x - m\tau) \int_0^{x-m\tau} \eta((x - m\tau)^2 - \eta^2)^{m-1} \Phi(\eta, y) d\eta$, причем

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2} [z^\omega(x - y) + z^\omega(x + y)] + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} z^\nu(\xi) d\xi, \text{ а } z^\omega(x) = \omega(x)H(x) + \sum_{m=1}^k (-1)^m \gamma_m H(x - m\tau) \int_0^{x-m\tau} \eta(x^2 - (\eta + m\tau)^2)^{m-1} \omega(\eta) d\eta,$$

$z^\nu(x)$ совпадает с $z^\omega(x)$ если там заменить $\omega(x)$ на $\nu(x)$; $\gamma_m = (m! \Gamma(m) 2^{2m-1})^{-1}$; $H(\xi)$ — функция Хевисайда.

Единственность решения задачи P следует из того, что однородная задача P ($f(x) \equiv 0$, $\psi_k(x) \equiv 0$) имеет тривиальное решение, поскольку интегро-дифференциально-разностное уравнение

$$D_+^{2\alpha} \omega(s) - \omega'(x) = \mu_k(x) \equiv \delta_k(x) - F(x) - \sum_{m=1}^k \gamma_m H(x - m\tau) \int_0^{x-m\tau} (x - m\tau - \eta)^{2(m-1)} \omega(\eta) d\eta, \quad k\tau < x < (k+1)\tau, \quad (8)$$

полученное из (6), (7), в силу условий сопряжения (4), (5) ($\delta_k(x) \equiv 0$, $F(x) \equiv 0$ при $\psi_k(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv 0$), в условиях $\omega(k\tau) = 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) имеет нулевое решение.

Вопрос существования решения задачи P сводится к разрешимости уравнения (8) ($\delta_k(x) = 0$, $F(x) = 0$), когда $\omega(k\tau) = \psi_k(k\tau)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), в классе функции $\omega(x) \in C(\bar{J}) \cap C^2(J)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Функции $\delta_k(x)$, $F(x)$ известны и выражаются через $\psi_k(x)$, $f(x)$ соответственно.