

УДК 517.956, 517.968.2

О РАЗРЕШИМОСТИ ОСОБЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ВТОРОГО РОДА

© М. М. Амангалиева, А. Е. Туймебаева *

* aknur@math.kz

Институт математики ЦФМИ МОН РК, Алматы, Казахстан

На вещественной полуоси $\mathbb{R}_+ \equiv (0, +\infty)$ рассматриваются вопросы разрешимости следующего интегрального уравнения

$$\mathbf{K}_\lambda \mu \equiv (I - \lambda \mathbf{K})\mu \equiv \mu(t) - \lambda \int_0^\infty k\left(\frac{\tau}{t}\right) \mu(\tau) \cdot \frac{d\tau}{\tau} = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

и его сопряженного

$$\mathbf{K}_\lambda^* \nu \equiv (I - \bar{\lambda} \mathbf{K}^*)\nu \equiv \nu(t) - \bar{\lambda} \int_0^\infty k\left(\frac{t}{\tau}\right) \nu(\tau) \cdot \frac{d\tau}{t} = g(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (2)$$

где ядро $k(z)$ определено соотношением

$$k(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi}(1-z)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{1}{4(1-z)}\right\}, & 0 < z < 1, \\ 0, & 1 \leq z < +\infty; \end{cases}$$

$\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, $e^{-t}f(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$, $e^tg(t) \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$.

Решения уравнений (1) и (2) соответственно ищутся в классах:

$$e^{-t}\mu(t) \in L_1(\mathbb{R}_+), \quad e^t\nu(t) \in L_\infty(\mathbb{R}_+).$$

Заметим, что в уравнениях (1) и (2) ядро интегрального оператора $k(z)$ обладает свойством: норма интегрального оператора, определяемого ядром $k(z)$ и действующего в пространстве суммируемых функций, равна $\operatorname{erfc}(1/2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{1/2}^\infty e^{-\xi^2} d\xi$. Это свойство определяет особенность рассматриваемого интегрального уравнения (1).

Отметим, что необходимость исследования особых интегральных уравнений вида (1) возникает, например, при изучении некоторых нелокальных внутренне-граничных задач для параболического уравнения [1], спектрально-нагруженных параболических уравнений [2, 3], задач с подвижной границей и обратных задач для параболических уравнений и т.д.

Вначале исследуем соответствующее (1) однородное уравнение

$$\mu(t) - \lambda \int_0^\infty k\left(\frac{\tau}{t}\right) \mu(\tau) \cdot \frac{d\tau}{\tau} = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (3)$$

Применяя к нему преобразование Меллина, с учетом теоремы о свертке, получим

$$\hat{\mu}(s) \cdot [1 - \lambda \hat{k}(s)] = 0, \quad s = s_1 + is_2,$$

где $\widehat{\mu}(s)$ — изображение функции $\mu(t)$, а изображение ядра имеет вид

$$\widehat{k}(s) = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{\pi}(1-z)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4(1-z)}\right) z^{-s-1} dz, \quad \operatorname{Re} s < 0.$$

Сформулируем установленный результат для спектральной задачи (3).

Теорема 1. Для интегрального оператора $\mathbf{K}$ из (3) множество $\sigma(\mathbf{K}) \equiv \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$ является множеством характеристических чисел, а $\mathbb{C} \setminus \sigma(\mathbf{K})$ — резольвентным множеством.

Теперь перейдем к исследованию однородного сопряженного интегрального уравнения для уравнения (2):

$$\nu(t) - \bar{\lambda} \int_0^\infty k\left(\frac{t}{\tau}\right) \nu(\tau) \cdot \frac{d\tau}{t} = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (4)$$

Если в уравнении (4) произвести замены: $t = t_1^{-1}$, $\tau = \tau_1^{-1}$ и ввести следующее обозначение $\nu_1(t_1) = t^{-1}\nu(t_1^{-1})$, то (4) преобразуется к виду

$$\nu_1(t_1) - \bar{\lambda} \int_0^\infty k\left(\frac{\tau_1}{t_1}\right) \nu_1(\tau_1) \frac{d\tau_1}{\tau_1} = 0,$$

т. е. оно совпадает с интегральным уравнением (3), где неизвестной функцией выступает функция $\nu_1(t_1)$. Здесь справедлива следующая

Теорема 2. Для интегрального оператора $\mathbf{K}^*$ из (4) вся комплексная плоскость не содержит собственных значений.

Для неоднородного уравнения (1) получено следующее представление его решения:

$$\mu(t) = f(t) + l(-s^*) \int_0^t \frac{\tau^{-s^*-1}}{t^{-s^*}} f(\tau) d\tau + C \cdot t^{-s^*}, \quad \text{если } \operatorname{Re} \lambda > 0;$$

$$\mu(t) = f(t) + \int_0^t \sum_{k=1}^\infty l(s_k^0) \frac{\tau^{s_k^0-1}}{t^{s_k^0}} f(\tau) d\tau, \quad \text{если } \operatorname{Re} \lambda < 0.$$

Для решения неоднородного уравнения (2) соответственно получаем:

$$\nu(t) = g(t) + l(s^*) \int_t^\infty \frac{\tau^{s^*-1}}{t^{s^*}} g(\tau) d\tau, \quad \operatorname{Re} s^* > 0, \quad \text{при } \operatorname{Re} \lambda < 0;$$

$$\nu(t) = g(t) + \int_t^\infty \sum_{k=1}^\infty l(s_k^0) \frac{\tau^{s_k^0-1}}{t^{s_k^0}} g(\tau) d\tau, \quad \operatorname{Re} s_k^0 < 0, \quad \text{при } \operatorname{Re} \lambda > 0$$

тогда и только тогда, когда выполнено условие ортогональности $\int_0^\infty g(t) t^{-s^*} dt = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джсеналиев М. Т., Рамазанов М. И., Туймебаева А. Е. Спектрально-нагруженный оператор теплопроводности. Автомодельный закон движения точки нагрузки. Препринт № 6. Алматы, 2006. 40 с.
2. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М., 1995.
3. Джсеналиев М. Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы, 1995.