Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 63–64

УДК 517.941.1

СТАБИЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О СОВМЕСТНОМ ДВИЖЕНИИ ДВУХ БИНАРНЫХ СМЕСЕЙ

© В. К. Андреев

andr@icm.krasn.ru

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

Рассматривается система уравнений двумерного движения двух бинарных смесей с плоской границей раздела в отсутствии внешних сил. Можно показать, что эта система допускает однопараметрическую подгруппу, соответствующую оператору $\partial/\partial x + A_j\partial/\partial\theta_j + B_j\partial/\partial c_j$, A_j, B_j — постоянные. Инвариантное решение следует искать в виде

$$u_j = u_j(y,t), \quad \theta_j = A_j x + T_j(y,t), \quad c_j = B_j x + K_j(y,t). \tag{1}$$

Решению (1) можно дать следующую интерпретацию. Предположим, что на границе раздела двух смесей $y = 0$ поверхностное натяжение линейно зависит от температуры и концентрации: $\sigma(\theta, c) = \sigma_0 - æ_1\theta - æ_2 c$, где $æ_1 > 0$, $æ_2$ — постоянные (обычно $æ_2 < 0$, поскольку поверхностное натяжение увеличивается с ростом концентрации). В начальный момент времени первая смесь заполняет слой $-l_1 < y < 0$, а вторая — слой $0 < y < l_2$. Смеси находятся в покое, и при $t = 0$ во всем пространстве мгновенно создается поле температур $\theta_j = A_j x$ и поле концентраций $c_j = B_j x$. Термоконцентрационный эффект порождает движение смесей, в котором поверхность раздела остается плоскостью $y = 0$, а траектории являются прямыми, параллельными оси x . Функции u_j, T_j, K_j можно назвать возмущениями состояния покоя смесей.

Подстановка (1) в систему уравнений термодиффузионного движения с учетом условий на границе раздела $y = 0$ приводит к начально-краевой задаче

$$u_{jt} = \nu_j u_{jyy}; \quad T_{jt} = \chi_j T_{jyy} - A u_j; \quad K_{jt} = d_j K_{jyy} + \alpha_j d_j T_{jyy} - B_j u_j \tag{2}$$

при $-l_1 < y < 0 \quad (j = 1)$, $0 < y < l_2 \quad (j = 2)$;

$$u_1(0,t) = u_2(0,t), \quad T_1(0,t) = T_2(0,t), \quad K_1(0,t) = \lambda K_2(0,t); \tag{3}$$

$$k_1 T_{1y}(0,t) = k_2 T_{2y}(0,t); \tag{4}$$

$$d_1(K_{1y}(0,t) + \alpha_1 T_{1y}(0,t)) = d_2(K_{2y}(0,t) + \alpha_2 T_{2y}(0,t)); \tag{5}$$

$$\rho_2\nu_2 u_{2y}(0,t) - \rho_1\nu_1 u_{1y}(0,t) = -æ_1 A - æ_2 B_1; \tag{6}$$

$$u_j(y,0) = 0, \quad T_j(y,0) = 0, \quad K_j(y,0) = 0. \tag{7}$$

Во втором уравнении из (2) $A \equiv A_1 = A_2$ (это следствие равенства температур при $y = 0$); в граничном условии (3) $\lambda = \mathrm{const}$ — постоянная равновесия Генри, поэтому $B_1 = \lambda B_2$; ν_j, χ_j, d_j, α_j, k_j — физические положительные постоянные смесей. К этим условиям необходимо присоединить еще условия на твердых стенках $y = -l_1$, $y = l_2$:

$$u_1(-l_1,t) = u_2(l_2,t) = 0 \tag{8}$$

— условия прилипания;

$$T_1(-l_1,t) = T_{1cm}(t), \quad T_2(l_2,t) = T_{2cm}(t) \tag{9}$$

— задание возмущений температуры;

$$\left(\frac{\partial K_1}{\partial y}+\alpha_1\frac{\partial T_1}{\partial y}\right)\Big|_{y=-l_1}=0, \quad \left(\frac{\partial K_2}{\partial y}+\alpha_2\frac{\partial T_2}{\partial y}\right)\Big|_{y=l_2}=0 \tag{10}$$

— отсутствие потоков смесей сквозь стенки.

Видно, что уравнения (2)–(10) образуют три последовательно решаемые задачи для функций (u_1,u_2), (T_1,T_2), (K_1,K_2).

В связи с поведением решения задачи (2)–(6), (8)–(10) при $t\to\infty$ представляет интерес ее стационарное решение. Конечно, при этом T_{jcm} представляют собой постоянные T^0_{jcm}, а начальные условия (7) не ставятся. Показано, что скорости стационарного течения $u^0_j(y)$ являются линейными, а $T^0_j(y)$, $K^0_j(y)$ — кубическими:

$$u^0_1=a\left(1+\frac{y}{l_1}\right), \quad u^0_2=a\left(1-\frac{y}{l_2}\right),$$

$$T^0_1=\frac{Aa}{\chi_1}\left(\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6l_1}\right)+C_1y+C_2, \quad T^0_2=\frac{Aa}{\chi_2}\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6l_2}\right)+kC_1y+C_2,$$

$$K^0_1(y)=-\frac{\alpha_1aA}{6\chi_1l}\left[y^3+3ly^2+\frac{2l^3}{k+1}(1-\chi)y\right],$$

$$K^0_2(y)=-\frac{\alpha_2aA}{6\chi_2l}\left[-\chi y^3+3\chi ly^2+\frac{2kl^3}{k+1}(1-\chi)y\right],$$

где

$$a=-\frac{Hl_1}{\mu_2(\mu+l_0)}, \quad H=-(æ_1A+æ_2B_1), \quad l_0=\frac{l_1}{l_2},$$

$$C_1=\frac{1}{l_2(l_0+k)}\left[T^0_{2cm}-T^0_{1cm}+\frac{Aal_2^2}{3\chi_1}(l_0^2-\chi)\right], \quad k=k_1/k_2,$$

$$C_2=\frac{1}{l_0+k}\left[kT^0_{1cm}+l_0T^0_{2cm}-\frac{Aal_0l_2^2}{3\chi_1}(l_0k+\chi)\right], \quad \chi=\chi_1/\chi_2.$$

Справедлива

Теорема. *Предположим, что* $\lim\limits_{t\to\infty}T_{jcm}(t)=T^0_{jcm}$, *тогда при* $t\to\infty$ *решение задачи* (2)–(10) *выходит на стационарный режим и имеют место оценки*

$$|u_j(y,t)-u^0_j(y)|\le C_1\exp(-\delta_1t), \quad |T_j(y,t)-T^0_j(y)|\le C_2\exp(-\delta_2t),$$

$$\lim_{t\to\infty}K_j(y,t)=K^0_j(y),$$

δ_1,δ_2, C_1,C_2 *— постоянные, зависящие от входных данных. При* $l_1,l_2\to\infty$ *решение этой же задачи стремится к автомодельному.*

Теорема доказывается с помощью метода априорных оценок и преобразования Лапласа.