Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 65–66

УДК 517.953.5

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

© Ю. П. Апаков

apakov.1956@mail.ru

Наманганский инженерно-педагогический институт, Наманган, Узбекистан

В области $D = \{(x,y) : 0 < x < a,\ 0 < y < b\}$ рассмотрим уравнение

$$U_{xxx} - U_{yy} = f(x,y), \tag{1}$$

где a, b — некоторые постоянные числа и $f(x,y)$ — известная функция, удовлетворяющая следующим условиям: $f(x,y), f'_y(x,y) \subset C(\bar{D}),\ \ f(x,0) = f(x,b) = 0$.

Задача K. Найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$U(x,0) = 0, \quad U(x,b) = 0, \quad 0 < x < a, \tag{2}$$

$$U(0,y) = U(a,y) = U'_x(a,y) = 0, \quad 0 < y < b. \tag{3}$$

Единственность решения этой задачи доказывается методом интеграла энергии.

Будем искать решение задачи в виде ряда Фурье по y

$$U(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) \sin \frac{n\pi}{b} y. \tag{4}$$

Представим функцию $f(x,y)$ в виде ряда Фурье

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad f_n(x) = \frac{2}{b} \int_0^b f(x,\eta) \sin \frac{n\pi}{b} \eta d\eta. \tag{5}$$

Подставляя (4) в уравнение (1), учитывая (3), имеем следующую задачу для $U_n(x)$:

$$\begin{cases} U_n''' + \lambda_n U_n = f(x), \\ U_n(0) = 0, \quad U_n(a) = 0, \quad U_n'(a) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Пусть решение задачи (6) имеет вид

$$U_n(x) = A_n(x) \exp(-k_n x), \tag{7}$$

где $k_n = (\frac{\pi n}{b})^{\frac{3}{2}}$, $A_n(x)$ — неизвестные функции.

Подставляя (7) в уравнение (6) и полагая $A'_n(x) = B_n(x)$, получаем

$$B_n'' - 3k_n B_n' + 3k_n^2 B_n = e^{k_n x} f_n(x). \tag{8}$$

Неизвестные функции $A_n(x)$ должны удовлетворять условию

$$A_n(0) = 0, \quad A_n(a) = 0, \quad A'_n(a) = 0. \tag{9}$$

Следовательно, для функций $B_n(x)$ выполняются условия $B_n(a) = 0$.

Уравнения (8) является уравнением вынужденных колебаний и её общее решение имеет вид [1]

$$B_n(x) = C_{1n}e^{\frac{3}{2}k_n x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}k_n(x - C_{2n}) + \frac{2}{\sqrt{3}k_n}\int\limits_x^a e^{\frac{1}{2}k_n(3x-\xi)}f_n(\xi)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}k_n(\xi - x)d\xi.$$

Из условия $B_n(a) = 0$ следует

$$B_n(x) = -C_{1n}e^{\frac{3}{2}k_n x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}k_n(a - x) + \frac{2}{\sqrt{3}k_n}\int\limits_x^a e^{\frac{1}{2}k_n(3x-\xi)}f_n(\xi)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}k_n(\xi - x)d\xi. \tag{10}$$

Учитывая, что $A_n(x) = \int\limits_0^x B_n(\eta)\,d\eta$, имеем

$$A_n(x) = -C_{1n}\int\limits_0^x e^{\frac{3}{2}k_n\eta}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}k_n(a-\eta)d\eta + \frac{2}{\sqrt{3}k_n}\int\limits_0^x d\eta\int\limits_\eta^a e^{\frac{1}{2}k_n(3\eta-\xi)}f_n(\xi)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}k_n(\xi-\eta)d\xi.$$

Коэффициенты C_{1n} определяются из условия. $A_n(a) = 0$. Тогда получим

$$A_n(x) = -\frac{\sigma_{2n}(a)}{\sigma_{1n}(a)}\sigma_{1n}(x) + \sigma_{2n}(x), \tag{11}$$

Учитывая (7), (11) и (4), имеем решение задачи К в виде

$$U(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{\sigma_{2n}(a)}{\sigma_{1n}(a)}\sigma_{1n}(x) + \sigma_{2n}(x)\right]e^{-k_n x}\sin\frac{n\pi}{b}y, \tag{12}$$

где

$$\sigma_{1n}(x) = \frac{1}{\sqrt{3}k_n}\left\{e^{\frac{3}{2}k_n x}\sin\left[\frac{\sqrt{3}}{2}k_n(a-x) + \frac{\pi}{6}\right] - \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}k_n a + \frac{\pi}{6})\right\},$$

$$\sigma_{2n}(x) = \frac{2}{\sqrt{3}k_n}\int\limits_0^x d\eta\int\limits_\eta^a e^{\frac{1}{2}k_n(3\eta-\xi)}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}k_n(\xi-\eta)f_n(\xi)\,d\xi,$$

$$\sigma_{1n}(a) = \frac{1}{\sqrt{3}k_n}\left[\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}k_n a} - \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}k_n a + \frac{\pi}{6})\right],$$

$$\sigma_{2n}(a) = \frac{2}{3k_n^2}\int\limits_0^a\left[\frac{1}{2}e^{k_n\xi} - e^{-\frac{1}{2}k_n\xi}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}k_n\xi + \frac{\pi}{6})\right]f_n(\xi)d\xi.$$

(12) является решением уравнении (1) с краевым условиям (2), (3).

Итак, доказана следующая

Теорема. *Если* $f(x,y), f'_y(x,y) \in C^1\left(\overline{D}\right)$ *и* $f(x,0) = f(x,b) = 0$, *то решение задачи К имеет вид (12) и оно непрерывно вместе со своими производными третьего порядка по* x, *второго порядка по* y.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. М., 1952.