

УДК 517.953.5

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

© Ю. П. Апаков*, Б. Ю. Иргашев

* apakov.1956@mail.ru

Наманганский инженерно-педагогический институт, Наманган, Узбекистан

Рассмотрим уравнение

$$U_{xxx} - y^m U_{yy} = 0, \quad 0 \leq m \leq 1, \quad (1)$$

в области $D = \{(x; y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$.ЗАДАЧА A_m . Найти регулярное решение $U(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C_{x,y}^{3,2}(D)$ уравнения (1) в области D , удовлетворяющее краевым условиям

$$\lim_{y \rightarrow +0} (y^{\frac{m-1}{2}} U) = 0, \quad U(x, 1) = 0, \quad (2)$$

$$U(0, y) = \varphi_1(y), \quad U(1, y) = \varphi_2(y), \quad U'_x(1, y) = \varphi_3(y), \quad (3)$$

где $\varphi_i(y) \in C^3(\overline{D})$, $\varphi_i(0) = \varphi_i(1) = \varphi_i''(0) = \varphi_i''(1) = 0$, $\varphi_i(y), \varphi_i''(y) \in L_2(0, 1)$, $i = 1, 2, 3$.**Теорема.** Однородная задача A_m имеет только тривиальное решение.ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что однородная задача A_m имеет нетривиальное решение. Рассмотрим тождество

$$UL[U] = \frac{\partial}{\partial x}(UU_{xx} - \frac{1}{2}U_x^2) - \frac{\partial}{\partial y}[y^m UU_y - \frac{m}{2}(y^{\frac{m-1}{2}} U)^2] + y^m U_y^2 + \frac{m(1-m)}{2} y^{m-2} U^2 = 0.$$

Интегрируя это тождество в области D и учитывая однородные краевые условия, получим

$$\frac{1}{2} \int_0^1 U_x^2(0, y) dy + \iint_D y^m U_y^2 dx dy + \iint_D \frac{m(1-m)}{2} y^{m-2} U^2 dx dy = 0.$$

Отсюда при $m \neq 0$ и $m \neq 1$ имеем $U(x, y) = 0$. Если $m = 0$ и $m = 1$, то $U_y(x, y) = 0$, т. е. $U(x, y) = f(x)$. Из $U(x, 0) = 0$ следует $f(x) \equiv 0$, тогда $U(x, y) \equiv 0$.

Используем метод разделения переменных. Пусть

$$U(x, y) = X(x)Y(y). \quad (4)$$

Подставляя (4) в уравнение (1), получим

$$Y'' + \lambda y^{-m} Y = 0, \quad \lambda > 0, \quad (5)$$

$$X''' + \lambda X = 0. \quad (6)$$

Для функции $Y(y)$ имеем следующую вспомогательную задачу

$$\begin{cases} Y'' + \lambda y^{-m} Y = 0, \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Общее решение уравнения (7) при $0 \leq m < 1$ имеет вид [1]

$$Y(y) = \sqrt{y} \left[C_1 J_{\frac{1}{2-m}} \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}} \right) + C_2 J_{-\frac{1}{2-m}} \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}} \right) \right], \quad (8)$$

где $J_\nu(y)$ — функция Бесселя, порядка $\nu = \frac{1}{2-m}$, $\frac{1}{2} \leq \nu < 1$, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Используя граничные условия (7), получим $C_2 = 0$,

$$Y(1) = C J_{\frac{1}{2-m}} \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-m} \right) = 0. \quad (9)$$

Известно [2], что при вещественном $\nu \geq -1$, функция $J_\nu(z)$ имеет бесконечно много простых нулей. Обозначим их через μ_k , где $k = \overline{1, \infty}$, причем $0 < \mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots$

Тогда $\lambda_k = \left[\frac{(2-m)\mu_k}{2} \right]^2$. Итак, λ_k — собственные значения, удовлетворяющие уравнению (9). Собственная функция имеет вид

$$Y_k(y) = \sqrt{y} J_{\frac{1}{2-m}} \left(\frac{2\sqrt{\lambda_k}}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}} \right). \quad (10)$$

Как известно, $Y_k(y)$ ортогональны относительно скалярного произведения

$$(Y_k(y), Y_n(y)) = \int_0^1 y^{-m} Y_k(y) Y_n(y) dy = \begin{cases} 0, & \text{при } n \neq k, \\ \frac{1}{2-m} J_{\frac{1}{2-m}+1}^2 \left(\frac{2\sqrt{\lambda_k}}{2-m} \right), & \text{при } n = k. \end{cases}$$

Функция (10) удовлетворяет $\lim_{y \rightarrow +0} (y^{\frac{m-1}{2}} Y) = 0$. Этот результат имеет место и при $m = 1$.

Общее решение уравнения (6) имеет вид

$$X_n(x) = C_{1n} e^{-k_n x} + e^{\frac{1}{2} k_n x} (C_{2n} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} k_n x + C_{3n} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} k_n x), \quad (11)$$

где $k_n = \sqrt[3]{\lambda_n}$, C_i — произвольные постоянные, $i = 1, 2, 3$.

Учитывая (10), (11) и (4), имеем решение

$$U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [C_{1n} e^{-k_n x} + e^{\frac{1}{2} k_n x} (C_{2n} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} k_n x + C_{3n} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} k_n x)] Y_n(y) \quad (12)$$

Из краевых условий (3) получим систему алгебраических уравнений для определения C_i :

$$\begin{cases} C_{1n} + C_{2n} = \varphi_{1n}, \\ C_{1n} + e^{\frac{3}{2} k_n} (C_{2n} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} k_n + C_{3n} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} k_n) = \varphi_{2n} e^{k_n}, \\ C_{1n} - e^{\frac{3}{2} k_n} (C_{2n} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} k_n + \frac{\pi}{3}) + C_{3n} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} k_n + \frac{\pi}{3})) = \frac{-\varphi_{3n}}{k_n} e^{k_n}, \end{cases}$$

где φ_{in} — коэффициенты ряда Фурье – Бесселя по собственным функциям $\{Y_n(y)\}$

$$\varphi_i(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{in} Y_n(y) dy, \quad \varphi_{in} = \int_0^1 y^{-m} \varphi_i(y) Y_n(y) dy.$$

Определитель этой системы отличен от нуля.

При сделанных предположениях данных функции доказывается равномерная сходимость ряда (12) и их производных до третьего порядка по x и до второго порядка по y .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Градштейн И. С, Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1963. 1100 с.
2. Бейтмен Г. Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. II. М.: Наука, 1974. 296 с.