

УДК 517.55

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

© Э. В. Арбузов, А. Л. Бухгейм

arbuzov@math.nsc.ru, bukhgeim@math.nsc.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

В работе рассматривается задача Коши для эллиптических уравнений второго порядка с переменными коэффициентами в ограниченной плоской области с данными Коши, известными только на участке границы области. Для решения исследуемой задачи получена формула типа Карлемана и оценка условной устойчивости.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — ограниченная односвязная область с границей класса C_α^1 , $0 < \alpha < 1$, $M \subset \partial\Omega$ — участок границы, состоящий из объединения конечного числа замкнутых дуг.

Для функции $u(x, y) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ рассматривается задача Коши для эллиптического уравнения второго порядка в каноническом виде:

$$\Delta u(x, y) + a_1(x, y)u_x(x, y) + a_2(x, y)u_y(x, y) + a_0(x, y)u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

$$u(x, y)|_M = u_0(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu} u(x, y)|_M = u_1(x, y),$$

где коэффициенты $a_0(x, y) \in C(\bar{\Omega})$, $a_1(x, y), a_2(x, y) \in C^1(\bar{\Omega})$, данные Коши $u_0(x, y) \in C^1(M)$, $u_1(x, y) \in C(M)$, и $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ — вектор единичной внешней нормали.

Как известно ([1]), эллиптическое уравнение общего вида, с помощью соответствующей замены переменных, можно привести к каноническому виду (1) во всей области Ω .

Формулы, позволяющие находить решение эллиптического уравнения в случае, когда данные Коши известны лишь на части границы области, получили название формул типа Карлемана [2]. В работе используется метод, предложенный в [3] Г. М. Голузиным и В. И. Крыловым, позволяющий найти решение с помощью дополнительной функции со специальными свойствами на границе области.

Используя следующие обозначения:

$$z = x + iy, \quad u(z) = u(x, y), \quad d\eta = d\eta_1 d\eta_2,$$

$$2\bar{\partial} = \partial_x + i\partial_y, \quad 2\partial = \partial_x - i\partial_y,$$

$$\mathbb{P}(A)(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{A(\eta)}{\eta - \zeta} d\eta, \quad \bar{\mathbb{P}}(A)(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{A(\eta)}{\bar{\eta} - \bar{\zeta}} d\eta,$$

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 2\bar{\partial} & 0 \\ 0 & 2\partial \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & q_{12} \\ q_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

уравнение (1) можно представить в виде эллиптической системы уравнений первого порядка.

Лемма. Пусть $A(z) = a_1(z) - ia_2(z)$,

$$u_1(z) = e^{\frac{1}{4}\mathbb{P}\bar{A}}u(z), \quad u_2(z) = e^{\frac{1}{4}\bar{\mathbb{P}}A}(2\bar{\partial}u(z) + \frac{1}{2}\bar{A}(z)u(z)),$$

и

$$q_{12} = -e^{\frac{1}{4}(\mathbb{P}\bar{A} - \bar{\mathbb{P}}A)}, \quad q_{21} = -e^{\frac{1}{4}(\bar{\mathbb{P}}A - \mathbb{P}\bar{A})}(\partial\bar{A}(z) + \frac{1}{4}|A(z)|^2 - a_0(z)),$$

Тогда уравнение (1) можно записать в виде системы для вектор-функции $\mathbf{u}(z) = (u_1(z), u_2(z))$:

$$L\mathbf{u} = (\mathcal{D} + Q)\mathbf{u} = 0.$$

Основной полученный результат сформулирован в следующем утверждении.

Теорема. Пусть $\varphi(\zeta)$ — аналитическая в Ω функция, такая что

$$\operatorname{Re}\varphi(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta \in M; \\ 0, & \zeta \in \partial\Omega \setminus M. \end{cases}$$

Матрица $\Phi(\zeta) = \begin{pmatrix} e^{\tau\varphi(\zeta)} & 0 \\ 0 & e^{\tau\bar{\varphi}(\zeta)} \end{pmatrix}$, и вектор-функция $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2\bar{\partial}\mathcal{E}(\zeta - z) \\ 0 \end{pmatrix}$, где $\mathcal{E}(z) = -\frac{1}{2\pi}\ln r$,

$$L^\sharp = \mathcal{D}^* + (\Phi^*)^{-1}(\mathcal{D}^*\Phi^*) + (\Phi^*)^{-1}Q^*\Phi^*, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\bar{q}_{12}e^{\tau(\bar{\varphi}(\zeta)-\varphi(\zeta))} 2\bar{\partial}\mathcal{E}(\zeta - z) \end{pmatrix}.$$

Тогда существует число τ_0 такое, что при $\tau \geq \tau_0$, найдется вектор-функция $\mathbf{w} \in W_p^1(\Omega)$, $1 < p < 2$, которая является решением системы $L^\sharp\mathbf{w} = \mathbf{g}$, и для любого $z \in \Omega$ имеет место равенство

$$u(z) = e^{-\frac{1}{4}\mathbb{P}\bar{A}} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_M e^{-\tau\varphi(z)} < \Phi\mathbf{u}, (\nu_1 I - i\nu_2 J)(\mathbf{w} - \mathbf{v}) > ds,$$

где $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, и выполняется оценка

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |u(z)| \leq \varepsilon l(u) + C(\varepsilon) \|u\|_{C^1(M)},$$

где

$$l(u) = \|u\|_{C^1(\partial\Omega \setminus M)},$$

$$C(\varepsilon) = \varepsilon^{1-1/\psi(z)} (\psi(z)/C_0)^{-1/\psi(z)}, \quad \psi(z) = \operatorname{Re} \varphi(z),$$

а C_0 — константа, зависящая от $\|\mathcal{E}(\zeta - z)\|_{C^1(\partial\Omega)}$, $|\partial\Omega|$, $\|A\|_{C(\Omega)}$, $\|\partial\mathcal{E}\|_{L_p(\Omega)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. При нахождении решения системы $L^\sharp\mathbf{w} = \mathbf{g}$ используются свойства компактности оператора $\mathbb{P}$, а также его дифференциальные свойства, доказательство которых приведено в [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988.
2. Carleman T. Les fonctions quasi analytiques. Paris, 1926.
3. Голузин Г. М., Крылов В. И. Обобщенная формула Carleman'a и ее применения к аналитическому продолжению функций // Мат. сб. 1933. Т. 40, № 2. С. 144–149.