

УДК 517.97

АНОРМАЛЬНЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ И ТЕОРЕМА ОБ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

© А. В. Арутюнов

arutun@orc.ru

Российский университет дружбы народов, Москва

Рассмотрим классическую экстремальную задачу с ограничениями

$$f_0(x) \rightarrow \min, \quad f_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Здесь гладкие функции f_i задают ограничения, а f_0 — минимизируемый функционал. Пусть x_0 — точка локального минимума. Известно, что если точка x_0 аномальна (вырождена), то есть градиенты ограничений $f'_i(x_0)$ линейно зависимы, то классический принцип Лагранжа вырождается (не несет содержательной информации), а классические необходимые условия второго порядка не выполняются.

В докладе обсуждается это явление вырождения и излагается теория необходимых условий первого и второго порядков одинаково содержательная как для вырожденных, так и для невырожденных задач. Эти необходимые условия заключаются в неотрицательной определенности максимума из вторых производных функции Лагранжа, взятому по некоторому специально строящемуся множеству множителей Лагранжа. Это множество состоит из тех множителей Лагранжа, для которых индекс соответствующей квадратичной формы, определяемой функцией Лагранжа, не превышает порядка аномальности рассматриваемой точки. Оказывается, что для аномальных точек приводимые условия превращаются в классические условия второго порядка. Указанные результаты являются развитием принципа Лагранжа и обобщаются на теорию оптимального управления.

Вторая часть доклада посвящена теореме об обратной функции, справедливой без априорных предположений нормальности. Рассмотрим систему нелинейных уравнений, имеющую в векторной записи вид $F(x) = y$, где F — гладкое отображение одного банахова пространства X в другое (для простоты можно считать эти пространства конечномерными). Если точка x_0 аномальна, то есть линейный оператор $F'(x_0)$ не является сюръективным (например, $F'(x_0) = 0$), то в точке x_0 классическая теорема об обратной функции неприменима. В докладе обсуждается это явление вырождения и предлагается вариант теоремы об обратной функции, который применим и в вырожденных точках.

Устанавливается связь между необходимыми условиями оптимальности и теоремой об обратной функции. Важно отметить, что все излагаемые в докладе результаты являются содержательными и в конечномерном случае (даже, если X трехмерное пространство).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арутюнов А. В. Условия экстремума. Аномальные и вырожденные задачи. М.: Факториал, 1997.
2. Арутюнов А. В. Теорема о неявной функции как реализация принципа Лагранжа. Аномальные точки // Математический сборник. 2000. Т. 191, № 1. С. 3–26.