

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С ДАННЫМИ НА ХАРАКТЕРИСТИКАХ ДЛЯ СИСТЕМЫ ИНТЕГРО- ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

© А. Т. Асанова

anar@math.kz

Институт математики ЦФМИ МОН РК, Алматы, Казахстан

В прямоугольнике $\Omega = [0, T] \times [0, \omega]$ рассматривается краевая задача с данными на характеристиках для системы интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} + B(t, x) \frac{\partial u}{\partial t} + C(t, x)u + f(t, x) +$$

$$+ \int_0^T \left\{ K_1(\tau, x) \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial x} + K_2(\tau, x) \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial t} + K_3(\tau, x)u(\tau, x) \right\} d\tau, \quad (1)$$

$$u(t, 0) = \psi(t), \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

$$P_2(x) \frac{\partial u(0, x)}{\partial x} + P_1(x) \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} + P_0(x)u(0, x) + S_2(x) \frac{\partial u(T, x)}{\partial x} + S_1(x) \frac{\partial u(T, x)}{\partial t} +$$

$$S_0(x)u(T, x) = \varphi(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (3)$$

где $u \in R^n$, $(n \times n)$ -матрицы $A(t, x)$, $B(t, x)$, $C(t, x)$, $K_i(t, x)$, $i = \overline{1, 3}$, $P_j(x)$, $S_j(x)$, $j = \overline{0, 2}$, n -вектор-функции $f(t, x)$, $\varphi(x)$ непрерывны на Ω и $[0, \omega]$, соответственно, n -вектор-функция $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0, T]$ и $\|u(t, x)\| = \max_{i=\overline{1, n}} |u_i(t, x)|$,

$$\|A(t, x)\| = \max_{i=\overline{1, n}} \sum_{j=1}^n |a_{ij}(t, x)|.$$

Непрерывная на Ω функция $u(t, x)$ называется *классическим решением задачи* (1)–(3), если она имеет непрерывные на Ω частные производные $\frac{\partial u(t, x)}{\partial x}$, $\frac{\partial u(t, x)}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t \partial x}$, удовлетворяет системе (1) при всех $(t, x) \in \Omega$ и условиям (2), (3).

К системам интегро-дифференциальных уравнений в частных производных (1) приводит математическое моделирование различных процессов в физике, химии и биологии. В связи с этим возникает необходимость исследования вопросов разрешимости различных краевых задач для указанной системы и нахождения их классических решений.

При отсутствии интегрального слагаемого в системе уравнений (1), краевая задача для системы гиперболических уравнений с условиями (2), (3), рассматривалась в работе [1]. Для исследования и решения этой задачи был предложен метод введения функциональных параметров, который позволил установить коэффициентный критерий корректной разрешимости рассматриваемой задачи [2, 3], а также построить алгоритм нахождения ее классического решения.

В сообщении задача (1)–(3) исследуется и решается методом введения функциональных параметров. Получены достаточные условия существования единственного классического решения задачи (1)–(3) в терминах исходных данных и предложен алгоритм ее нахождения.

Введем обозначения: I — единичная матрица размерности $(n \times n)$, $\alpha(x) = \max_{t \in [0, T]} \|A(t, x)\|$,

$$k_1(x) = \max_{t \in [0, T]} \|K_1(t, x)\|, \quad Q_1(T, x) = P_2(x) + S_2(x) \left\{ I + \int_0^T [A(\tau, x) + TK_1(\tau, x)] d\tau \right\}.$$

Теорема 1. Пусть матрица $Q_1(T, x)$ обратима для всех $x \in [0, \omega]$ и выполнены неравенства:

a) $\| [Q_1(T, x)]^{-1} \| \leq \gamma(T, x)$, $\gamma(T, x)$ — непрерывная на $[0, \omega]$ функция,

b) $q_1(T, x) = e^{\alpha(x)T} \cdot T^2 \cdot k_1(x) < 1$,

c) $q_2(T, x) = \frac{e^{\alpha(x)T} - 1 + q_1(T, x)}{1 - q_1(T, x)} \gamma(T, x) \cdot \|S(x)\| T [\alpha(x)T + Tk_1(x)] \leq \beta < 1$, β — const.

Тогда задача (1)–(3) имеет единственное классическое решение $u^*(t, x)$.

Доказательство теоремы проводится аналогично схеме доказательства теоремы 1 из [1]. Условия теоремы одновременно обеспечивают осуществимость и сходимость предлагаемого в сообщении алгоритма нахождения классического решения задачи (1)–(3).

Как видно из утверждения теоремы, основным условием однозначной разрешимости задачи (1)–(3) является обратимость матрицы $Q_1(T, x)$ для всех $x \in [0, \omega]$. Если матрицы $A(t, x)$ и $K_1(t, x)$ являются нулевыми матрицами, а $P_2(x) = I$, $S_2(x) = -I$, то матрица $Q_1(T, x)$ не будет обратимой. В этом случае налагая дополнительные требования, кроме непрерывности, на данные задачи также можно установить достаточные условия существования ее единственного классического решения.

Таким образом, рассматривается система интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = B(t, x) \frac{\partial u}{\partial t} + C(t, x)u + f(t, x) + \int_0^T \left\{ K_2(\tau, x) \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial t} + K_3(\tau, x)u(\tau, x) \right\} d\tau, \quad (4)$$

с условиями (2) и

$$\frac{\partial u(0, x)}{\partial x} + P_1(x) \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} + P_0(x)u(0, x) - \frac{\partial u(T, x)}{\partial x} + S_1(x) \frac{\partial u(T, x)}{\partial t} + S_0(x)u(T, x) = \varphi(x). \quad (5)$$

Справедливо утверждение

Теорема 2. Пусть матрица $Q_2(T, x) = P_0(x) + S_0(x) - \int_0^T [C(\tau, x) + TK_3(\tau, x)] d\tau$ обратима для всех $x \in [0, \omega]$ и выполнено соотношение

$$\begin{aligned} & P_1(0)\dot{\psi}(0) + P_0(0)\psi(0) + S_1(0)\dot{\psi}(T) = \\ & = \varphi(0) + \int_0^T \{ [B(\tau, 0) + TK_2(\tau, 0)]\dot{\psi}(\tau) + [C(\tau, 0) + TK_3(\tau, 0)]\psi(\tau) + f(\tau, 0) \} d\tau. \end{aligned}$$

Тогда задача (4), (2), (5) имеет единственное классическое решение $u^*(t, x)$.

Доказательство теоремы 2 проводится аналогично схеме доказательства теоремы из [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Асанова А. Т., Джумабаев Д. С. Однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 10. С. 1343–1354.
2. Асанова А. Т., Джумабаев Д. С. О корректной разрешимости нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Доклады РАН. 2003. Т. 391, № 3. С. 295–297.
3. Асанова А. Т., Джумабаев Д. С. Корректная разрешимость нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 3. С. 337–446.
4. Асанова А. Т. О полупериодической краевой задаче для системы гиперболических уравнений // Известия НАН РК. Сер. физ.-матем. 2004. № 3. С. 20–25.