

УДК 517.925.5

О КОЛЕБЛЕМОСТИ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

© И. В. Астахова

ast@diffiety.ac.ru

Московский государственный университет экономики, статистики и информатики, Москва

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) y^{(i)} + p(x) |y|^{k-1} y = 0, \quad (1)$$

где $p(x)$ и $a_i(x)$ — непрерывные функции, $n \geq 1$, $k > 1$.

Приводятся достаточные условия существования неколеблющегося решения уравнения (1), критерий существования неколеблющегося решения с ненулевым пределом на бесконечности в случае $p(x) > 0$ и, как следствие, критерий колеблемости всех решений этого уравнения в случае, когда оно имеет четный порядок.

Теорема 1. Пусть в уравнении (1) функции $p(x)$, $a_j(x)$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, удовлетворяют условиям

$$\int_x^\infty x^{n-1} |p(x)| dx < \infty; \quad (2)$$

$$\int_x^\infty x^{n-j-1} |a_j(x)| dx < \infty. \quad (3)$$

Тогда уравнение (1) имеет неколеблющееся решение, стремящееся к ненулевому пределу при $x \rightarrow \infty$.

Теорема 2. Пусть в уравнении (1) функция $p(x)$ положительна, а функции $a_j(x)$, $j = 0, \dots, n-1$, удовлетворяют условиям (3).

Тогда следующие условия равносильны:

- (i) функция $p(x)$ удовлетворяет неравенству (2),
- (ii) уравнение (1) имеет заданное в некоторой окрестности $+\infty$ неколеблющееся решение $y(x)$, которое при $x \rightarrow \infty$ не стремится к нулю.

Следствие. Пусть в уравнении (1) четного порядка n функция $p(x)$ положительна, а функции $a_j(x)$, $j = 0, \dots, n-1$, удовлетворяют условиям (3).

Тогда следующие условия равносильны:

- (i) функция $p(x)$ удовлетворяет неравенству (2),
- (ii) уравнение (1) имеет заданное в некоторой окрестности $+\infty$ неколеблющееся решение $y(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Приведенные результаты являются обобщением известного критерия колеблемости Ф. Аткинсона [1], доказанным для уравнения (1) при $a_i(x) = 0$, $n = 2$, $k = 2l - 1$, где l — целое число, большее 1, обобщенным И.Т.Кигурадзе на случай произвольного $k > 1$ (см. [2]) и на случай $a_i(x) = 0$ и $n \geq 2$ (см. [3]). Работа [4] содержит обобщение результата Ф.Аткинсона на уравнения второго порядка с нелинейностью более общего вида, а также подробное изложение других имеющихся результатов, связанных с вопросами колеблемости решений уравнений второго порядка. Колеблемость решений уравнений высокого порядка изучалась в работах [3, 5, 6, 8, 9] и в работе [7], содержащей подробную библиографию.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Доказательство приведенных результатов основано на методах, связанных с представлением линейного дифференциального оператора, порождающего уравнение (1), в виде оператора квазипроизводной в окрестности бесконечности. Подобное разложение использовалось в [10], но на конечном отрезке.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06-01-00715) и гранта НШ - 2538.2006.1

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Atkinson F. V.* On second order nonlinear oscillations // *Pacif. J. Math.* 1955. V. 5, N 1. P. 643–647.
2. *Кизурадзе И. Т.* Об условиях колеблемости решений уравнения $u'' + a(t)|u|^n \operatorname{sgn} u = 0$ // *Čas. pěst. mat.* 1962. V. 87, N 4. P. 492–495.
3. *Кизурадзе И. Т.* О колеблемости решений уравнения $d^m/dt^m + a(t)|u|^n \operatorname{sgn} u = 0$ // *Мат. сборник.* 1964. Т. 65, № 2. С. 172–187.
4. *Wong J. S. W.* On second-order nonlinear oscillation // *Funkcialaj Ekvacioj.* 1968. V. 11. P. 207–234.
5. *Lovelady D. L.* On the oscillatory behavior of bounded solutions of higher order differential equations // *J. Diff. Equations.* 1975. V. 19, N 1. P. 167–175.
6. *Кондратьев В. А., Самовол В. С.* О некоторых асимптотических свойствах решений уравнений типа Эмдена – Фаулера. // *Дифф. уравнения.* 1981. Т. 17, № 4. С. 749–750.
7. *Кизурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990. 432 с.
8. *Кизурадзе И. Т.* Критерий колеблемости для одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений // *Дифф. уравнения.* 1992. Т. 28, № 2. С. 207–219.
9. *Astashova I. V.* Application of Dynamical Systems to the Study of Asymptotic Properties of Solutions to Nonlinear Higher-Order Differential Equations // *Journal of Mathematical Sciences.* Springer Science+Business Media. 2005. V. 126, N 5. P. 1361–1391.
10. *Асташова И. В.* Равномерные оценки положительных решений квазилинейных дифференциальных уравнений // *Доклады РАН.* 2006. Т. 409, № 5. С. 586–590.