

УДК 517.956.22

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

© А. О. Бабаян

armenak@web.am

Государственный инженерный университет Армении, Ереван, Армения

Пусть $D = \{z \mid |z| < 1\}$ — единичный круг комплексной плоскости, и $\Gamma = \partial D$ — его граница. В области D рассматривается дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\sum_{k=0}^4 A_k \frac{\partial^4 u}{\partial x^k \partial y^{4-k}}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D. \quad (1)$$

Здесь A_k ($k = 0, \dots, 4$) комплексные постоянные, такие, что корни λ_k характеристического уравнения

$$\sum_{k=0}^4 A_k \lambda^{4-k} = 0 \quad (2)$$

удовлетворяют условию

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3, \quad \Re \lambda_j > 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad \Re \lambda_4 < 0. \quad (3)$$

Решение u уравнения (1) ищется в классе $C^4(D) \cap C^{(1,\alpha)}(D \cup \Gamma)$ и на границе Γ удовлетворяет условиям Дирихле:

$$u|_{\Gamma} = f(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial r}|_{\Gamma} = g(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma. \quad (4)$$

где $f \in C^{(1,\alpha)}(\Gamma)$, $g \in C^{(\alpha)}(\Gamma)$ — заданные функции.

Из (3) следует, что уравнение (1) является неправильно эллиптическим. Как было показано в [1], для таких уравнений краевые задачи в классической постановке не являются нетеровыми. В [2] были исследованы краевые задачи для неправильно эллиптических уравнений второго порядка и описаны более узкие классы функций, в которых данные задачи являются нетеровыми. Вопросу однозначной разрешимости задачи Дирихле для уравнения четвертого порядка посвящена работа [3]. Задача Дирихле для правильно эллиптического уравнения высокого порядка изучена в [4]. В настоящей работе, используя представление общего решения (1), полученное в [4], исследуется однородная и неоднородная задачи (1), (4).

Для формулировки полученных результатов представим (1) и (4) в комплексной форме, используя операторы $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$. Уравнение (1) примет вид:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \mu \frac{\partial}{\partial z} \right)^3 \left(\frac{\partial}{\partial z} - \nu \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) u = 0, \quad (x, y) \in D,$$

где $|\mu| < 1$, $|\nu| < 1$ ($\mu = \frac{i-\lambda_1}{i+\lambda_2}$, $\nu = \frac{i+\lambda_4}{i-\lambda_4}$), а граничные условия (4) заменяются эквивалентными условиями:

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}|_{\Gamma} = F(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial z}|_{\Gamma} = G(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (5)$$

$$u(1, 0) = f(1, 0).$$

Здесь функции $F \in C^{(\alpha)}(\Gamma)$ и $G \in C^{(\alpha)}(\Gamma)$ однозначно определяются по f и g :

$$F(x, y) = \frac{z}{2} \left(g(x, y) + i \frac{\partial f}{\partial \varphi}(x, y) \right), \quad G(x, y) = \frac{\bar{z}}{2} \left(g(x, y) - i \frac{\partial f}{\partial \varphi}(x, y) \right), \quad z = re^{i\varphi} \in \Gamma.$$

Разложим эти функции в ряд Фурье на Γ и обозначим F_- и G_- компоненты разложений, допускающие аналитическое продолжение в $\mathbb{C} \setminus (D \cup \Gamma)$:

$$F(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{-1} f_k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \equiv F_-(z) + F_+(z),$$

$$G(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{-1} d_k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k \equiv G_-(z) + G_+(z), \quad z = x + iy, \quad (x, y) \in \Gamma.$$

Получены следующие результаты:

Теорема 1. При $\mu \neq 0$ однородная задача (1), (4) не имеет ненулевых решений, а для разрешимости неоднородной задачи необходимо, чтобы функции F и G аналитически продолжались в кольцо $D_0 = \{|\mu| < |z| < 1\}$ и достаточно, чтобы F и G являлись также производными функций, удовлетворяющих условию Гельдера в замкнутой области $\bar{D}_0$.

Теорема 2. При $\mu = 0$ однородная задача (1), (4) имеет бесконечное множество линейно независимых решений. Общее решение однородной задачи имеет вид:

$$u_0(x, y) = (1 - z\bar{z})^2 \Phi(z),$$

где Φ произвольная аналитическая в D функция. Неоднородная задача имеет решение тогда и только тогда, когда G_- функционально зависит от F_- . Зависимость выражается в явном виде.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если в (5) $F \equiv 0$ и $G(z) = (z - \mu)^{-2}$ то задача (1), (4) не имеет решения. Этот пример показывает, что достаточные условия в теореме 1 существенно ослабить нельзя.

В работе изучены также другие варианты распределения корней характеристического уравнения (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966. 204с.
2. Товмасын Н. Е. Новые постановки и исследования первой, второй и третьей краевых задач для сильно связанных эллиптических систем двух дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами // Известия АН Арм. ССР, серия математика. 1968. Т. 3, № 6. С. 497–521.
3. Буряченко Е. А. О единственности решения задачи Дирихле в круге для дифференциальных уравнений четвертого порядка в вырожденных случаях // Нелинейные граничные задачи. Донецк. 2000. Т. 10. С. 44–90.
4. Бабалян А. О. Задача Дирихле для правильно эллиптического уравнения в единичном круге // Известия НАН Армении, серия математика. 2003. Т. 38, № 6. С. 39–48.
5. Tovmasyan N. E. Non-Regular Differential Equations and Calculations of Electromagnetic Fields. World Scientific, Singapore, 1998. 235 p.