

УДК 517.956.6

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

© У. И. Балтаева

umidabaltaeva@rambler.ru

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

Теория краевых задач для нагруженных уравнений параболического, гиперболо-параболического и эллипτικο-параболического типов исследована в работах Нахушева А. М., Елева В. А., Исламова Б., Курьязова Д., Козиева В. М. и др. [1–4].

Краевые задачи для нагруженного уравнения третьего порядка смешанного типа изучены сравнительно мало, отметим лишь работы [3, 4].

В настоящей работе исследуется краевая задача для нагруженного уравнения третьего порядка с параболо-гиперболическим оператором вида

$$0 = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(L_2 u) - \mu u(x, 0), & y > 0, \\ \frac{\partial}{\partial x}(L_1 x) - \mu u(x, 0), & y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $L_2 u = u_{xx} - u_y - \lambda u$, $L_1 u = u_{xx} - u_{yy} - \lambda u$; λ , μ — действительные постоянные, причем $\lambda \neq 0$, в области D , ограниченной отрезками AB , BB_0 , B_0A_0 , A_0A прямых $y = 0$, $x = 1$, $y = h$, $x = 0$ при $y > 0$ и характеристиками:

$$AC : x + y = 0, \quad BC : x - y = 1$$

уравнения (1) при $y < 0$.

Через D_1 и D_2 обозначим параболическую и гиперболическую части смешанной области D соответственно, и пусть

$$I_1 = \{(x, y); x = 0, 0 < y < h\}, \quad I_2 = \{(x, y) : y = 0, 0 < x < 1\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Решение уравнения (1) будем называть *регулярным*, если функция $u(x, y)$ обладает непрерывными производными, входящими в оператор L_i ($i = 1, 2$), и функция $L_i u$ имеет непрерывную производную по x .

ЗАДАЧА С. Требуется найти функцию $u(x, y)$, обладающую следующими свойствами:

- 1) $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D)$,
- 2) $u_x(x, y) \in C(\overline{AA_0} \cup \overline{AC})$, $u_y(x, y) \in C(\overline{AC})$,
- 3) $u(x, y)$ является регулярным решением уравнения (1) в области D при $y \neq 0$,
- 4) $u(x, y)$ удовлетворяет условиям:

$$u|_{x=0} = \varphi_1(y), \quad u|_{x=1} = \varphi_2(y), \quad u_x|_{x=0} = \varphi_3(y), \quad 0 \leq y \leq h,$$

$$u|_{AC} = \psi_1(y), \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{AC} = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2},$$

где n — внутренняя нормаль, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(y)$ и $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ — заданные функции, причем

$$\varphi_1(0) = \psi_1(0), \quad \varphi_j(y) \in C[0; h] \cap C^1(0; h), \quad j = \overline{1, 3},$$

$$\psi_1(x) \in C^1 \left[0; \frac{1}{2} \right] \cap C^3 \left(0; \frac{1}{2} \right), \quad \psi_2(x) \in C \left[0; \frac{1}{2} \right] \cap C^2 \left(0; \frac{1}{2} \right).$$

Имеет место

Лемма. Любое регулярное решение уравнения (1) (при $y \neq 0$) представляется в виде

$$u(x, y) = v(x, y) + w(x),$$

где $v(x, y)$ — решение уравнения $\frac{\partial}{\partial x}(L_2 v) = 0$ при $y > 0$, а при $y < 0$ — $\frac{\partial}{\partial x}(L_1 v) = 0$, $w(x)$ — решение следующего обыкновенного дифференциального уравнения

$$w'''(x) - \lambda w'(x) - \mu w(x) = \mu v(x, 0).$$

С помощью леммы задача С эквивалентно редуцируется к интегральному уравнению Вольterra второго рода со сдвигом. С помощью теории интегральных уравнений [5, 6] доказывается однозначная разрешимость задачи С.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нахушев А. М. // Дифференциальные уравнения. 1976. Т. 12, № 1.
2. Казиев В. М. // Дифференциальные уравнения. 1978. Т. 14, № 1. С. 181–185.
3. Елеев В. А. // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, № 2.
4. Исломов Б., Куръязов Д. М. // Узб. матем. журнал. 2000. № 2.
5. Джуроев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1979. 204 с.
6. Краснов И. Л. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1976. 215 с.