

УДК 517.95+533

# АНАЛИТИЧЕСКИЕ ТЕПЛОВЫЕ ВОЛНЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

© С. П. Баутин

SBautin@math.usart.ru

Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург

**Теорема 1.** Задача с заданным краевым режимом для нелинейного уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} u_t &= u\Delta u + (\nabla u)^2 / \sigma, \quad \sigma = \text{const} > 0, \\ u(t, \vec{x})|_{x_1=a^0(x_2, \dots, x_n)} &= f(t, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (1)$$

в случае аналитичности функций  $a^0(x_2, \dots, x_n)$ ,  $f(t, x_2, \dots, x_n)$  в некоторой окрестности точки  $(t=0, x_2=x_2^0, \dots, x_n=x_n^0)$ , при выполнении условий

$$f(t, x_2, \dots, x_n)|_{t=0} \equiv 0, \quad f_t(t, x_2, \dots, x_n)|_{t=0} = f_1(x_2, \dots, x_n) > 0$$

и при конкретном выборе направления движения тепловой волны имеет единственное аналитическое решение в некоторой окрестности точки  $(t=0, \vec{x}=\vec{x}^0)$ , где  $x_1^0 = a^0(x_2^0, \dots, x_n^0)$  [1–3].

Решение задачи (1) описывает процесс распространения с конечной скоростью по холодному фону тепловой волны, порожденной заданным краевым режимом температуры. Также решение задачи (1) описывает процесс фильтрации газа в пористом грунте, сопровождающийся распространением с конечной скоростью фронта фильтрации и определяемым заданным режимом давления на конкретной поверхности в пласте.

**Теорема 2.** При заданном фронте тепловой волны:  $x=a(t)$ ,  $a(0) \neq 0$  — система уравнений газовой динамики

$$\begin{cases} \rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0, \\ u_t + uu_x + \frac{1}{\gamma\rho} [T\rho_x + (\rho + \sigma_1 T^3) T_x] = 0, \\ (\rho + \sigma_2 T^3) (T_t + uT_x) + (\gamma - 1)T (\rho + \sigma_1 T^3) u_x = \kappa_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{T^3}{\rho} \frac{\partial T}{\partial x} \right), \end{cases} \quad (2)$$

описывающая течения теплопроводного невязкого газа с уравнениями состояния

$$p = R\rho T + \frac{1}{3} \sigma T^4, \quad e = c_v T + \sigma \frac{T^4}{\rho}$$

имеет единственное решение в виде сходящегося ряда

$$\mathbf{W} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{W}_k(t) \frac{\xi^k}{k!}; \quad \mathbf{W} = (\rho, u, T); \quad \xi = \sqrt[3]{x - a(t)},$$

непрерывно примыкающее через заданный фронт  $x=a(t)$  к однородному холодному покоящемуся газу с параметрами

$$\rho(t, x) = 1, \quad u(t, x) = 0, \quad T(t, x) = 0.$$

При этом тепловой поток на фронте  $x=a(t)$  непрерывен — равен нулю с обеих сторон [4].

Здесь  $t$  — время;  $x$  — пространственная координата;  $\rho$  — плотность;  $u$  — скорость газа;  $T$  — температура  $p$  — давление;  $e$  — внутренняя энергия;  $R, \sigma, c_v, \sigma_1, \sigma_2, \kappa_0$  — положительные постоянные.

Приведенные уравнения состояния и коэффициент теплопроводности учитывают равновесное излучение.

Исследование поддержано РФФИ, проект 04-01-00205.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баутин С. П. Тепловая волна, порожденная заданным краевым режимом // Доклады Академии наук. 2003. Т. 391, № 3. С. 327–330.
2. Баутин С. П. Аналитическая тепловая волна. Москва: Физматлит, 2003. 88 с.
3. Баутин С. П., Елисеев А. А. Многомерная аналитическая тепловая волна, определяемая краевым режимом // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42, № 8. С. 1052–1062.
4. Баутин С. П., Садов А. П. Одномерная тепловая волна в невязком газе // Вычислительные технологии. 2006. Т. 11, № 5. С. 11–20.