Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 80–81

УДК 517.9

ОБ ИНДЕКСЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

© С. Байзаев *, Э. М. Мухамадиев **

* baisat54@rambler.ru, ** muhamerg41@mail.vstu.edu.ru

* *Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики, Худжанд, Таджикистан;*
** *Вологодский государственный технический университет, Вологда*

Теория для обобщенных систем Коши – Римана вида

$$Lw \equiv w_{\bar z} + a(z)w + b(z)\bar w = 0, \tag{1}$$

где $z = x+iy$, в случае, когда коэффициенты $a(z)$ и $b(z)$ принадлежат пространству $L_{p,2}(C)$, $p > 2$, разработана И. Н. Векуа [1], Л. Берсом и их последователями. В докладе изучается [1, 2] система с ограниченными на комплексной плоскости коэффициентами, принадлежащими пространству Гельдера C_α функций, ограниченных и равномерно непрерывных по Гельдеру с показателем $\alpha \in (0,1)$. В этих условиях оператор L действует из пространства C^1_α в пространство C_α и является непрерывным. Здесь C^1_α — пространство таких фнкций w из C_α, для которых частные производные w_x, w_y также принадлежат C_α. Функцию $d \in C_\alpha$ назовем слабо осциллирующей на бесконечности, если имеет мест равенство

$$\lim_{z\to\infty} \max_{|z-\zeta|\le 1} |d(z) - d(\zeta)| = 0.$$

Теорема 1. *Пусть коэффициенты a, b оператора L слабо осциллируют на бесконечности. Тогда оператор $L : C^1_\alpha \mapsto C_\alpha$ является нетеровым тогда и только тогда, когда имеет место неравенство*

$$\varepsilon_0 \equiv \liminf_{z\to\infty}(|b(z)| - |a(z)|) > 0. \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть коэффициенты a, b оператора L слабо осциллируют на бесконечности и выполнено условие (2). Тогда решение уравнения (1), принадлежащее пространству C^1_α, убывает на бесконечности как $\exp(-\varepsilon|z|)$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.*

Теорема 3. *Если в условиях теоремы 2, коэффициенты a, b бесконечно дифференцируемы, то решение уравнения (1), принадлежащее пространству S' медленно растущих обобщенных функций, принадлежит пространству основных быстро убывающих функций S.*

При выполнении условия (2) существует такое $R_0 > 0$, что для значений $R > R_0$ определена целочисленная характеристика $\gamma(b,R) = (\theta(R,2\pi) - \theta(R,0))/2\pi$, где $\theta(R,\varphi)$ — одна из непрерывных ветвей функции $\operatorname{Arg} b(R\exp(i\varphi))$. Значение $\gamma(b,R)$ не зависит от R и это общее значение $\gamma(b)$ назовем индексом Коши функции b на бесконечности.

Теорема 4. *Пусть коэффициенты уравнения (1) слабо осциллируют на бесконечности и выполнено условие (2). Тогда нетеров индекс $\operatorname{ind} L$ оператора $L : C^1_\alpha \mapsto C_\alpha$ совпадает с идексом Коши $\gamma(b)$ функции b на бесконечности: $\operatorname{ind} L = \gamma(b)$.*

Рассмотрим более общую равномерно эллиптическую систему

$$Mu \equiv u_x + A(x,y)u_y + B(x,y)u = 0,$$

где

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

и

$$\inf_{(x,y)\in R^2,\ \xi^2+\eta^2=1} |\det(\xi\cdot I+\eta\cdot A)|>0.$$

Теперь предположим, что C_α обозначает пространства вектор-функций $u : R^2 \to R^2$, ограниченных и равномерно непрерывных по Гельдеру с показателем $\alpha\in(0,1)$, а C^1_α — это пространство вектор-функций u, удовлетворяющих условиям u, u_x, $u_y\in C_\alpha$.

Теорема 5. *Пусть столбцы матриц A и B принадлежат пространствам C^1_α и C_α соответственно и слабо осциллируют на бесконечности. Тогда оператор $M : C^1_\alpha \mapsto C_\alpha$ является нетеровым тогда и только тогда, когда имеет место неравенство*

$$\limsup_{x^2+y^2\to\infty} \det B(x,y)<0. \tag{3}$$

При выполнении условия (3) определен индекс Коши функции $b(z)=b_{11}(x,y)+ib_{21}(x,y)$, $z=x+iy$ на бесконччности. Из условия равномерной эллиптичности оператора M следует, что функция $a_{21}(x,y)$ не обращается в нуль. Следовательно, определен знак $\operatorname{sign} a_{21}(0,0)$.

Теорема 6. *Пусть коэффициенты уравнения (1) слабо осциллируют на бесконечности и выполнено условие (3). Тогда нетеров индекс $\operatorname{ind} M$ оператора $M : C^1_\alpha \mapsto C_\alpha$ совпадает с идексом Коши $\gamma(b)$ функции b, умноженном на знак $\operatorname{sign} a_{21}(0,0)$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959. 628 с.
2. *Мухамадиев Э. М., Байзаев С.* // ДАН СССР. 1986. Т. 287, № 2. С. 280–283.
3. *Мухамадиев Э. М., Байзаев С.* // ДАН Тадж. ССР. 1987. Т. 30, № 4. С. 207–211.