

H -ОТОБРАЖЕНИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЕЙ

© Акр. Х. Бегматов*, З. Х. Очилов

* akrambegmatov@mail.ru

Самаркандский государственный университет им. А. Навои, Самарканд, Узбекистан

В настоящей работе рассматриваются h -конформные отображения областей, ограниченных жордановыми кривыми (см. [1]). Мы будем, следуя [2], называть h -конформные отображения просто h -отображениями.

Пусть D — область, ограниченная кривой C , состоящей из четырех частей: $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$:

$$C_1 = \{(x, y) : y = f_1(x), x \in [0, 1], f_1(0) = \frac{1}{2}, f_1(1) = 1\},$$

$$C_2 = \{(x, y) : y = f_2(x), x \in [0, 1], f_2(0) = 0, f_2(1) = 1\},$$

$$C_3 = \{(x, y) : y = f_3(x), x \in [-1, 0], f_3(0) = 0, f_3(-1) = 1\},$$

$$C_4 = \{(x, y) : y = f_4(x), x \in [-1, 0], f_4(-1) = 0, f_4(0) = \frac{1}{2}\}.$$

Все функции $f_k(x)$ монотонны и непрерывны.

Область D имеет вид: $D = \{(x, y) : f_1^* < f_2^*, x \in [-1, 1]\}$, где функции $f_k^*(x)$ ($k = 1, 2$) удовлетворяют следующим условиям:

- 1) $f_1^*(x) = f_2^*(x), -1 \leq x \leq 1$;
- 2) $f_k^*(-x) = f_k^*(x)$;
- 3) $f_k^*(-x) = f_k^*(x) = 1, f_2^*(0) = 0, f_1^*(0) = \frac{1}{2}$.

Рассмотрим h -отображения, осуществляемые функциями $u = \varphi(x)$, $v = \varphi(y)$. Обратными к ним будут функции $x = \varphi_1(u)$, $y = \varphi_1(v)$. h -отображения, которые осуществляются функциями $u = \varphi(x)$ и $v = \varphi(y)$, переводят область D в область $D_1 = \{(u, v) : F_1(u) < v < F_2(u)\}$. Здесь функции $F_k(u)$, $k = 1, 2$, определяются следующим образом: $v = \psi(y) = \psi(f_k^*(x)) = \psi(f_k^*(\varphi(u))) = F_i(u)$.

Определенное таким образом отображение переводит область D_0 в область плоскости (u_1, v_1) , ограниченную углом и кривой $v_1 = F_i(u)$. Рассмотрим теперь h -отображение, переводящее область D_0 в область D_1 плоскости (u_1, v_1) , ограниченную двумя углами:

$$F_1(u_1) = |u_1|, \quad u_1 \in [-1, 1]$$

$$F_2(u_1) = \frac{1}{2}|u_1| + \frac{1}{2}, \quad u_1 \in [-1, 1].$$

Пусть это отображение определяется функциями $u_1 = \varphi_2(u)$ и $v_1 = \psi_2(v)$. Из того, что отображение переводит область D_0 в D_1 следует, что эти функции связаны соотношениями

$$v_1 = \psi_2[f_i(u)] = \psi_2[f_i[\varphi_2(u_1)]] = F_i(u_i),$$

$$\psi_2[|\varphi_2(u_1)|] = |u|,$$

$$|\varphi_2(u)| = \psi_2(|u|),$$

$$\psi_2\{f_i[\varphi_2(u_1)] = F_i(u_i)\},$$

$$f[\varphi_2(u_1)] = \psi_2[F_i(u_1)].$$

В качестве функции $F_2(u_1)$ можно взять функцию $F_2(u_1)$, $u \in [0, 1]$, а в качестве функции $F_2(u)$ — функцию $F_1(u) = \frac{1}{2}(u) + \frac{1}{2}$. Таким образом, доказана теорема.

Теорема 1. Для любой области D плоскости (x, y) , для которой функция $f_1^*(x)$ удовлетворяет неравенству (2), существует h -отображение области D на область D_1 плоскости (u_1, v_1) , ограниченной кривыми $v_1 = |u_1|$ и $v_2 = \frac{1}{2}|u_2| + \frac{1}{2}$.

И, тем самым, получена теорема о возможности h -отображений на каноническую область для одного класса ограниченных областей, симметричных по отношению к оси y .

Далее в работе рассмотрена обратная задача для областей, удовлетворяющих условиям приведенной выше теоремы. Нами сформулирована обратная задача и доказана теорема о том, что решение сформулированной обратной задачи единственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М: Наука, 1977.
2. Лаврентьев М. М. Математические задачи томографии и гиперболические отображения // Сиб. мат. журнал. 2001. Т. 42, № 5. С. 1094–1105.