УДК 517.95

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

© В. С. Белонос

bvs@math.nsc.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Рассмотрим абстрактное нелинейное гиперболическое уравнение

$$\ddot{v} = -A^2v + \varepsilon[B(\omega t)v + \Pi\langle v \rangle]. \quad (1)$$

Здесь $v(t)$ — функция со значениями в гильбертовом пространстве H ; A — линейный самосопряженный положительный и, вообще говоря, неограниченный оператор в H , имеющий вполне непрерывный обратный; ε — малый параметр; $B(\tau)$ — 2π -периодическая функция со значениями в множестве линейных ограниченных операторов; $\Pi\langle v \rangle \equiv \Pi(v, v)$, где $\Pi(u, v)$ — билинейный ограниченный оператор, моделирующий квадратичную нелинейность. Уравнения такого типа возникают во многих вопросах механики и физики, в частности, при описании гидродинамики водонефтяных слоистых систем [1].

При $\varepsilon = 0$ общее решение уравнения (1) представимо суммой $v(t) = e^{iAt}x + e^{-iAt}y$ с произвольными постоянными амплитудами x и y из H . Если $\varepsilon \neq 0$, то решения (1) имеют такой же вид, но x , y уже являются функциями времени t . Нас интересует динамика амплитуд x и y , когда частота ω возмущения $B(\omega t)$ близка к одной из так называемых резонансных частот $(\lambda_j \pm \lambda_k)/m$, где λ_j и λ_k — произвольные собственные значения оператора A , $m = \pm 1, \pm 2, \dots$. В этом случае амплитуды x и y решений соответствующего линеаризованного уравнения могут экспоненциально расти. Это явление называется параметрическим резонансом, систематическое исследование которого в самых разнообразных ситуациях продолжается уже более ста лет (см., например, [2] и [3]). Численное исследование конкретных примеров показывает, что для нелинейных уравнений типа (1) поведение амплитуд гораздо сложнее: они могут быть близки к периодическим функциям, существенным образом зависящим от выбора начальных условий. Цель настоящей работы — предложить простые эффективные способы приближенного описания $x(t)$ и $y(t)$ в нелинейном случае.

Преобразуем исходное уравнение к системе первого порядка относительно неизвестных $x = e^{-iAt}[v + (iA)^{-1}\dot{v}]/2$, $y = e^{iAt}[v - (iA)^{-1}\dot{v}]/2$. Полагая

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix}, \quad E: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow x + y, \quad G: x \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix},$$

придем к уравнению

$$\dot{z} = \frac{\varepsilon}{2}(i\tilde{A})^{-1}e^{-i\tilde{A}t}G[B(\omega t)Ee^{i\tilde{A}t}z + \Pi\langle Ee^{i\tilde{A}t}z \rangle]$$

в пространстве $H^2 = H \otimes H$. Методом Крылова — Боголюбова [4] найдем асимптотическое разложение $z \approx \xi + \varepsilon\Phi(t, \xi) + \varepsilon^2\Psi(t, \xi)$ с точностью до второго порядка по малому параметру. Не останавливаясь на технических деталях, сразу приведем окончательный результат. Обозначим через P_j спектральные проекторы, отвечающие собственным значениям λ_j ($j = 1, 2, \dots$) оператора A . Понятно, что собственными числами оператора $\tilde{A}$ будут μ_j , ($j = \pm 1, \pm 2, \dots$), где $\mu_j = \lambda_j$ при $j > 0$ и $\mu_j = -\lambda_{-j}$ при $j < 0$, а отвечающие им спектральные проекторы равны соответственно

$$\tilde{P}_j = \begin{pmatrix} P_j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad j > 0; \quad \tilde{P}_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_{-j} \end{pmatrix}, \quad j < 0.$$

Пусть $B(\tau) = \sum_{m \neq 0} B_m e^{im\tau}$, $B_m^{jk} = \tilde{P}_j G B_m E \tilde{P}_k$, $\Pi_j^{kl}(\xi, \eta) = \tilde{P}_j G \Pi(E \tilde{P}_k \xi, E \tilde{P}_l \eta)$. Тогда в большинстве практически важных ситуаций, исключая некоторые вырожденные случаи, функция $\xi(t)$ удовлетворит уравнению

$$\dot{\xi} = \frac{\varepsilon}{2} \sum \frac{1}{i\mu_j} B_m^{jk} \xi - \frac{\varepsilon^2}{4} \sum \frac{B_{m-n}^{jl} B_n^{lk} \xi}{i\mu_j \mu_l (\mu_k - \mu_l + n\omega)} - \frac{\varepsilon^2}{2} \sum \frac{\Pi_j^{kl}(\xi, \Pi_l^{pq}(\xi, \xi))}{i\mu_j \mu_l (\mu_p + \mu_q - \mu_l)}. \quad (2)$$

Здесь первая сумма распространяется на все целые j, k, m , для которых $\mu_j - \mu_k = m\omega$; вторая сумма — на такие j, k, l, m, n , что $\mu_j - \mu_k = m\omega$, $\mu_l - \mu_k \neq n\omega$; наконец, третья сумма — на все j, k, l, p, q , для которых $\mu_p + \mu_q \neq \mu_l$, $\mu_p + \mu_q + \mu_k = \mu_j$.

Обозначим через $2D\xi$ первую сумму в правой части уравнения (2) и предположим, что оператор D не равен нулю, а равенство $\mu_j - \mu_k = m\omega$ возможно лишь для конечного множества наборов j, k, m . Разложим H^2 в сумму инвариантных относительно D подпространств H_1 и H_2 , где H_1 конечномерно, а $H_2 \subseteq \ker D$. Тогда уравнение (2) сведется к системе вида

$$\dot{\xi}_1 = \varepsilon D \xi_1 + \varepsilon^2 f(\xi_1, \xi_2), \quad \dot{\xi}_2 = \varepsilon^2 g(\xi_1, \xi_2), \quad \text{где } \xi_j \in H_j.$$

Структура отображений f и g такова, что существует замена переменных $\xi_1 = \zeta_1 + \varepsilon\varphi(\zeta_1, \zeta_2)$, $\xi_2 = \zeta_2 + \varepsilon\psi(\zeta_1, \zeta_2)$, приводящая эту систему с точностью до слагаемых выше второго порядка по ε к треугольной форме

$$\dot{\zeta}_1 = \varepsilon D \zeta_1 + \varepsilon^2 \tilde{f}(\zeta_1, \zeta_2), \quad \dot{\zeta}_2 = \varepsilon^2 \tilde{g}(\zeta_2). \quad (3)$$

Решение второго из уравнений (3) меняется очень медленно. С высокой степенью точности можно считать, что на интервале времени порядка ε^{-2} функция $\zeta_2(t)$ постоянна и равна $\zeta_2(0)$. Подставив $\zeta_2 \equiv \zeta_2(0)$ в первое из уравнений (3), приходим к динамической системе в конечномерном пространстве H_1 относительно вектора ζ_1 . Решение этой динамической системы в конечном счете и определяет поведение исходной функции $v(t)$. В частности, можно оценить нормы амплитуд колебаний в системе (1) в зависимости от начальных условий.

Не все детали описанного подхода на сегодняшний день строго обоснованы, однако численные эксперименты показывают его эффективность во многих практических ситуациях.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06–08–00386), Президиума РАН (программа № 14, проект № 115), Сибирского отделения РАН (проекты 1.6 и 42).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоносов В. С., Доровский В. Н., Белоносов А. С., Доровский С. В. Гидродинамика газосодержащих слоистых систем // Успехи механики. 2005. Т. 3, № 2. С. 37–70.
2. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
3. Якубович В. А., Старжинский В. М. Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987.
4. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Государственное изд-во физико-математической литературы, 1958.