Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 92–93

УДК 519.635.4

ОБ ОДНОЙ АПРИОРНОЙ ОЦЕНКЕ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПСЕВДОПАРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

© М. Х. Бештоков

beshtokov_murat@rambler.ru

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, Нальчик

В цилиндре $Q_T = \{(x,t): \ 0 < x < 1, \ \ 0 < t \leq T\}$ рассмотрим краевую задачу с нелокальным условием

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - q(x,t)u + f(x,t),$$
$$0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$u(0,t) = \alpha(t)u(1,t) + \int\limits_0^t h(t,\tau)u(1,\tau)d\tau, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u_x(1,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (4)$$

где $0 < c_0 \leq \eta(x,t) \leq c_1$, $|k(x,t)|, |k_t(x,t)|, |\eta_t(x,t)|, |r(x,t)|, |q(x,t)|, |h(t,t)|, |h_t(t,t)| \leq c_2$, $|\alpha(t)| \leq \alpha_0 < 1 \ \ \forall t \in [0,T]$.

Будем считать, что заданные в уравнении (1) и граничных условиях (2)–(4) коэффициенты удовлетворяют необходимым, по ходу изложения, условиям гладкости.

Предполагая существование регулярного решения дифференциальной задачи (1)–(4), получим априорную оценку для ее решения. Для получения априорной оценки воспользуемся методом энергетических неравенств. Для этого уравнение (1) умножим скалярно на u:

$$(u_t, u) = ((ku_x)_x, u) + ((\eta u_x)_{xt}, u) + (ru_x, u) - (qu, u) + (f, u), \quad (5)$$

где $(u,v) = \int\limits_0^1 uv dx, \quad \|u\|_0^2 = \int\limits_0^1 u^2 dx$.

После некоторых преобразований из (5) находим

$$\frac{\partial}{\partial t}\|u\|_0^2 + \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^1 \eta u_x^2 dx \leq M_1\left(\|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2\right) + 2\|u_t\|_0^2 + 3\|f\|_0^2, \quad (6)$$

где M_1 — положительное число.

Оценим в (6) $\|u_t\|_0^2$, для чего уравнение (1) умножим скалярно на u_t:

$$(u_t, u_t) = ((ku_x)_x, u_t) + ((\eta u_x)_{xt}, u_t) + (ru_x, u_t) - (qu, u_t) + (f, u_t). \quad (7)$$

Выбирая $\alpha_0 = \min\left(\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{c_0}}{6}\right)$, из (7) получаем

$$\|u_t\|_0^2 \le M_2\left(\|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2\right) + M_3\int\limits_0^t \left(\|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2\right)d\tau + M_4\|f\|_0^2, \tag{8}$$

где M_2, M_3, M_4 — положительные числа.

Учитывая (8), из (6) находим

$$\frac{\partial}{\partial t}\|u\|_0^2 + \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^1 \eta u_x^2 dx \le M_5\left(\|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2\right) + M_6\int\limits_0^t \left(\|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2\right)d\tau + M_7\|f\|_0^2, \tag{9}$$

где M_5, M_6, M_7 — положительные числа, зависящие только от входных данных задачи (1)–(4).

Проинтегрируем (9) по τ от 0 до t, тогда получим

$$\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 \le M_8\int\limits_0^t \left(\|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2\right)d\tau$$

$$+M_9\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau \left(\|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2\right)dp d\tau + M_{10}\left(\int\limits_0^t \|f\|_0^2 d\tau + \|u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,1)}\right), \tag{10}$$

где M_8, M_9, M_{10} — положительные числа, зависящие только от входных данных задачи (1)–(4).

Применяя к (10) лемму Гронуолла, получим

$$\|u\|^2_{W_2^1(0,1)} \le M(t)\left(\int\limits_0^t \|f\|_0^2 d\tau + \|u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,1)}\right), \tag{11}$$

где $M(t)$ зависит только от входных данных задачи (1)–(4).

Из априорной оценки (11) следует единственность решения исходной задачи (1)–(4) и непрерывная зависимость решения задачи от входных данных на каждом временном слое в норме пространства $W_2^1(0,1)$.

Замечание. Если в задаче (1)–(4) заменить краевое условие (3) условием вида

$$u_x(0,t) = 0, \qquad 0 \le t \le T, \tag{12}$$

то тогда, если $\forall t \in [0,T], |\alpha(t)| \ge \alpha_0 > 1$, то априорная оценка для задачи (1), (2), (12), (4) имеет вид

$$\|u\|^2_{W_2^1(0,1)} \le M(t)\left(\int\limits_0^t \|f\|_0^2 d\tau + \|u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,1)}\right),$$

где $M(t)$ зависит только от входных данных задачи (1), (2), (12), (4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кожанов А. И.* Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 6. С. 763–774.
2. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.