Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 96–97

УДК 517.956.6

ЗАДАЧА БИЦАДЗЕ – САМАРСКОГО ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

© У. Бобомуродов

Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан

Рассмотрим уравнение

$$L(u)=\begin{cases} u_{xx}+b(x,y)u_y+a(x,y)u_x+c(x,y)u=0, & y>0\\ (-y)^m u_{xx}+u_{yy}+\frac{\beta_0}{y}u_y=0, & m>0,\quad -m/2<\beta_0<1,\quad y<0, \end{cases} \tag{1}$$

в конечной односвязной области Ω комплексной плоскости $z=x+iy$, ограниченной отрезками AA_1, A_1B_1, BB_1 прямых $x=-1$, $y=T=const>0$, $x=1$ соответственно, лежащих в полуплоскости $y>0$, и нормальной кривой $\sigma_0: x^2+4(m+2)^{-2}(-y)^{m+2}=1$ уравнения (1) в полуплоскости $y<0$, где $A=A(-1,0)$, $B=B(1,0)$.

Обозначим через Ω_1 и Ω_2 параболические и эллиптические части смешанной области Ω, $I=(-1,1)$ — интервал оси $y=0$.

Известно [1], что при помощи подстановки

$$u(x,y)=\vartheta(x,y)\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{x}a(t,y)dt\right)$$

коэффициент $a(x,y)$ при u_x уравнения (1) в области Ω_1 можно обратить в нуль. Поэтому в дальнейшем без ограничения общности будем полагать, что $a(x,y)=0$ в Ω_1. Относительно коэффициентов уравнения (1) предполагаем, что $b(x,y)\in C^{2,\delta}(\Omega_1)$, $c(x,y)\in C^{2,\delta}(\overline{\Omega}_1)$, $0<\delta<1$

Задача A. Найти в замкнутой области $\overline{\Omega}$ непрерывную функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1) в области $\Omega\backslash I$;

2) в интервале I выполняется условие сопряжения

$$\lim_{y\to+0}\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y},\quad x\in I; \tag{2}$$

3) удовлетворяет краевым условиям

$$u(-1,y)=\varphi_1(y),\quad 0\le y\le T, \tag{3}$$

$$u\left[h(x)\right]=\mu(x)\,u(x,0)\,+\rho(x),\quad x\in\overline{I}, \tag{4}$$

$$u|_{\sigma_0}=\varphi(x),\quad x\in\overline{I}, \tag{5}$$

где $h(x_0)=1+iT(1-x_0)/2$ — аффикс точки пересечения прямой $y=T(x-x_0)/2$ с границей $BB_1:\ x=1$, $0\le y\le T$, $x_0\in\overline{I}$, заданные функции $\varphi_1(y)\in C\,[0,T]$, $\varphi(x)\in C^1(\overline{I})$, $\mu(x)$, $\rho(x)\in C^2(\overline{I})$, причем

$$\varphi(x)\,=(1-x^2)\,\widehat{\varphi}\,(x) \tag{6}$$

$\widehat{\varphi}\,(x)\in C(\overline{I})$.

Из непрерывности решения $u(x,y)$ в замкнутой области $\overline{\Omega}$ из краевых условий (3)–(5) следуют естественные условия согласованности $\varphi_1(0)=\varphi(-1)$, $\varphi(1)=\mu(1)\,\varphi(1)+\rho(1)$. Задача А является аналогом задачи Бицадзе – Самарского для уравнений эллиптико-параболического типа [2, 3].

Имеет место следующий

Принцип экстремума. *Пусть функция* $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})$, *обладает непрерывными производными* u_x, u_y *в* $\Omega_1\cup I$, u_x, $(-y)^{\beta_0}u_y$ *в* $\Omega_2\cup I$ *и удовлетворяет в области* $\Omega\backslash I$ *уравнению (1). Тогда при* $\rho(x)\equiv 0$

$$c(x,0)\leq 0,\quad b(x,0)<0, \tag{7}$$

$$0\leq\mu(x)\leq 1, \tag{8}$$

функция $u(x,y)$ *свой положительный максимум и отрицательный минимум в замкнутой области* $\overline{\Omega}$ *принимает на дуге* σ_0 *или на отрезке* AA_1.

Из принципа экстремума следует единственность решения задачи А .

Существование решение задачи А с использованием соответствующих формул, дающих решение первой краевой задачи для уравнения (1) в области Ω_1 [5], и решение видоизмененной задачи N для уравнения (1) в области Ω_2 [4, с. 93] исследуется методом работы [3, с. 11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Елеев В. А.* Аналог задачи Трикоми для смешанных параболо-гиперболических уравнений с нехарактеристической линией изменения типа // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. XIII, № 1. С. 56–63.
2. *Бицадзе А. В.,Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // ДАН СССР. 1969. Т. 185, № 4. С. 739–740.
3. *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1979. 240 с.
4. *Салахитдинов М. С, Мирсабуров М.* Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Ташкент: Universitet, Yangiyo'l poligraf servis, 2005. 224 с.
5. *Ильин А. М, Калашников А. С, Олейник О. А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа // УМН, 1962. Т. XIII, № 3. С. 3–146.