

УДК 519.634

## О СПЕКТРЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

© А. Н. Боголюбов, М. Д. Малых\*, А. А. Панин, А. Г. Свешников

\* malykham@mtu-net.ru

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва*

Простейшая краевая задача, доставляющая тем не менее все характерные трудности теории краевых задач, может быть поставлена так.

(А) Пусть заданы:  $U$  — область в  $\mathbb{R}^n$ , о границе которой не делается никаких предположений,  $f$  — кусочно непрерывная функция в  $\mathbb{R}^n$  с компактным носителем и  $\lambda$  — комплексный параметр. Требуется найти функцию  $v \in \mathring{W}_2^1(U)$ , удовлетворяющую в обобщенном смысле уравнению

$$\Delta v + \lambda v = f.$$

Используя теорему Рисса, задачу (А) можно записать в операторах

$$(\lambda + 1)A(U)v - v = f|_U,$$

где  $A(U)$  — ограниченный самосопряженный оператор, заданный билинейной формой

$$(w, A(U)v) = \int_U dx w^* v \quad \forall v, w \in \mathring{W}_2^1(U),$$

а  $f|_U$  — сужение функционала  $(f, \cdot)_{L^2(\mathbb{R}^n)}$  на  $\mathring{W}_2^1(U)$ . Спектром задачи (А) будем называть множество точек

$$\sigma(U) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda + 1 \in \sigma(A(U))\}.$$

Классические теоремы о спектрах краевых задач с различными граничными условиями приведены в [1], в 1990-х годах был достигнут значительный прогресс в исследовании областей, представляющих собой волноводы [2, 3]. Нам относительно спектров задачи (А) удалось доказать следующее.

1. Если области  $U_1$  и  $U_2$  совпадают вне компакта, то  $\sigma_{\text{ess}}(U_1) = \sigma_{\text{ess}}(U_2)$ .

Для случая достаточно гладкой границы эта теорема была установлена М. Ш. Бирманом [4]. Эта теорема позволяет вычислять существенный спектр в случае, когда область вне компакта совпадает с областью, в которой делятся переменные.

2. Для любой области  $U$  в  $\mathbb{R}^n$  с какой угодно границей существенный спектр имеет вид  $\sigma_{\text{ess}}(U) = [a, +\infty)$ , где  $a \geq 0$ .

Эта теорема указывает на принципиальное отличие теории спектра задачи (А) и спектральной теории оператора Шредингера. Типичной ситуацией для последней является случай спектра с лакунами, а одной из важнейших задач — оценка длины лакун.

3. Пусть  $F$  — гладкая поверхность, делящая  $\mathbb{R}^n$  на две области  $U$  и  $V$ , и пусть  $\vec{\nu}$  — ее единичная нормаль. Если существует такой постоянный вектор  $\vec{a}$ , что скалярное произведение  $(\vec{a}, \vec{\nu}) \geq 0$  вдоль всей границы  $\partial U$  и  $(\vec{a}, \vec{\nu}) > 0$  на некотором ее участке, то  $\sigma_{\text{disc}}(U) = \sigma_{\text{disc}}(V) = \emptyset$ .

Это утверждение обобщает критерий пустоты дискретного спектра, указанный Реллихом [5, § 2], [1, с. 249]. Условие гладкости границы существенно: контрпример фактически был построен в [6].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глазман И. М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М.: ГИФМЛ, 1963.
2. Linton C. M., McIver P. Embedded trapped modes in water waves and acoustics. Department of Mathematical Sciences, Loughborough University, Leicestershire. 2006. Preprint N 06-24.
3. Krejciric D., Kriz J. On the spectrum of curved planar waveguide // Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto University. 2005. V. 41. P. 757–791
4. Бирман М. Н. Возмущение непрерывного спектра сингулярного эллиптического оператора при изменении границы и граничных условий // Вестник Лен. ун-та. 1962, № 1. С. 22–55
5. Rellich Fr. Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von  $\Delta u + \lambda u = 0$  in unendlichen Gebieten // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 1943. Bd. 53. P. 57–65
6. Exner P., Šeba P., Tater M., Vaňek D. Bound states and scattering in quantum waveguides coupled laterally through a boundary window // J. Math. Phys. 1996. V. 37. P. 4867–4887.