Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 105–106

УДК 517.9

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДРОБНОГО ДИФФУЗИОННО-ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НЕКАРЛЕМАНОВСКИМ СДВИГОМ

© М. В. Бурцев, А. Н. Зарубин

burtsevmv@orel.ru, aleks_zarubin@mail.ru

Орловский государственный университет, Орел

1. Уравнение

$$H(-t)U_{tt}(x,t) + H(t)D^{\alpha}_{0t}U(x,\xi) = U_{xx}(x,t) - U(x-\tau,t), \tag{1}$$

где $0 < \tau \equiv const$; $0 < \alpha < 1$; $H(\xi)$ — функция Хевисайда; D^{α}_{ot} — оператор дробного (в смысле Римана – Лиувилля) интегродифференцирования, действующий на функцию $U(x,t)$ по переменной t; рассмотрим в области $D = D^+ \cup D^- \cup J$, $D^+ = R \times (0,+\infty)$, $D^- = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} D^-_k$, $D^-_k = \{(x,t):\ k\tau - t < x < (k+1)\tau + t,\ -\tau/2 < t < 0\}$, $J = \{(x,t):\ x > 0,\ t = 0\}$.

Задача V. Найти решение $U(x,t)$ уравнения (1) в области D из класса $D^{\alpha-1}_{0t}U(x,\xi) \in C(\overline{D^+})$, $t^{1-\alpha}D^{\alpha}_{0t}U(x,\xi) \in C(D^+ \cup J)$, $U(x,t) \in C(\overline{D^-})$, $U_{xx}(x,t) \in C(D^+ \cup D^-)$, $U_{tt}(x,t) \in C(D^-)$, удовлетворяющее граничным и начальным условиям

$$\lim_{t\to 0+} D^{\alpha-1}_{0t}U(x,\xi) = f(x),\ x \le 0, \tag{2}$$

$$U(x,t) = g(x,t),\ (x,t) \in \overline{D^-}_{(-1)}, \tag{3}$$

$$U(x,k\tau - x) = \psi_k(x),\ k\tau \le x \le (2k+1)\tau/2; \tag{4}$$

условиям сопряжения

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to 0+} D^{\alpha-1}_{0t}U(x,\xi) = \lim\limits_{t\to 0-} U(x,t) = \omega(x),\ x \in \overline{J}, \\ \lim\limits_{t\to 0+} t^{1-\alpha}D^{\alpha}_{0t}U(x,\xi) = \lim\limits_{t\to 0-} U_t(x,t) = \nu(x),\ x \in J, \end{cases} \tag{5}$$

где заданные функции $f(x) \in C(-\infty,0] \cap C^2(-\infty,0)$; $g(x,t) \in C(\overline{D^-}_{(-1)}) \cap C^2(D^-_{(-1)})$, $\psi_k(x) \in C[k\tau,(2k+1)\tau/2] \cap C^2(k\tau,(2k+1)\tau/2)$, причем $f(x) = g(x,0)$, $x \in [-\tau,0]$, $f(-\infty) = 0$, $f(0) = \psi_0(0)$, $\lim\limits_{k\to+\infty} \max\limits_{x\in[k\tau,(2k+1)\tau/2]} |\psi_k(x)| = 0$.

2. Единственность и существование решения задачи V. Решение задачи Коши в области D^- для уравнения (1) с начальными условиями (3), (5) имеет вид

$$U(x,t) = \{U_k(x,t),\ (x,t) \in \overline{D^-_k}\}, \tag{6}$$

где

$$U_k(x,t) = \phi(x,t)H(x) + \sum_{m=1}^{k} \gamma_m H(x-m\tau) \int\limits_0^{x-m\tau} \eta\left((x-m\tau)^2 - \eta^2\right)^{m-1} \phi(\eta,t)d\eta,$$

а

$$\phi(x,t)=\frac{1}{2}\left[z^{\omega}(x-t)+z^{\omega}(x+t)\right]+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} z^{\nu}(\xi)d\xi+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t} d\xi\int\limits_{x-(t-\xi)}^{x+(t-\xi)} g(r-\tau,\xi)dr,$$

$$z^{\nu}(x)=\nu(x)H(x)+\sum_{m=1}^{k}(-1)^m\gamma_m H(x-m\tau)\int\limits_{0}^{x-m\tau}\eta\left(x^2-(\eta+m\tau)^2\right)^{m-1}\nu(\eta)d\eta,$$

$z^{\omega}(x)$ совпадает с $z^{\nu}(x)$, если в ней заменить $\nu(x)$ на $\omega(x)$; $\gamma_m=\left(m!\Gamma(m)2^{2m-1}\right)^{-1}$.

Решение задачи Коши в области D^+ для уравнений (1) с начальным условием (2),(5), т.е. с $\overline{\omega}(x)=H(x)\omega(x)+H(-x)f(x)$, получено в форме

$$U(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\overline{\omega}(\xi)G(x,\xi,t)d\xi, \tag{7}$$

где

$$G(x,\xi,t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=1}^{+\infty}(-1)^m t^{\alpha(m+1)-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda(x-m\tau-\xi)}E^{m+1}_{\alpha,\alpha(m+1)}(-\lambda^2t^{\alpha})d\lambda,$$

а $E^{\rho}_{\alpha,\beta}=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{(\rho)_k t^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!}$ — обобщенная функция Миттаг – Леффлера; $(\rho)_k$ — символ Похгаммера.

Вопрос существования и единственности решения задачи V сводится к разрешимости интегрального уравнения

$$\omega''(x)-\Gamma(\alpha)\omega'(x)=\gamma_k(x)\equiv$$

$$\omega(x-\tau)-\delta_k(x)\Gamma(\alpha)-\Gamma(\alpha)\sum_{m=1}^{k}\gamma_m H(x-m\tau)\int\limits_{0}^{x-m\tau}(x-m\tau-\eta)^{2(m-1)}\omega(\eta)d\eta,$$

$k\tau<x<(k+1)\tau$, если $\omega(k\tau)=\psi_k(k\tau)$ $(k=0,1,2,\dots)$.