Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 102–103

УДК 517.9

МЕТОД МУЛЬТИПОЛЕЙ ДЛЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ОБЛАСТЯХ СО СКРУГЛЕННЫМИ УГЛАМИ

© Г. О. Бузыкин

gbuzykin@newmail.ru

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, Москва

Дано описание аналитико-численного метода (метода мультиполей [1]) для решения краевых задач в областях, граница которых содержит входящие углы, скругленные дугой окружности, на примере задачи Дирихле для плоского уравнения Лапласа

$$\Delta\psi\,(w)\,=\,0,\;\; w\in g\,;\qquad \psi\,(w')\,=\,0,\;\; w'\in\gamma\,;\qquad \psi\,(w')\,=\,h\,(w'),\;\; w'\in\Gamma\,, \tag{1}$$

в односвязной области g, граница которой состоит из двух звеньев: контура закругленного угла $\gamma=(ABNCD)$, где B и C — точки сопряжения дуги окружности (BNC) с двумя прямолинейными участками (AB) и (CD), и жордановой кусочно–гладкой дуги $\Gamma=(DA)$. Предполагаем также, что область g допускает расширение до области G, ограниченной бесконечным скругленным углом, т.е. $G\supset g$, $\partial G\supset\gamma$, $G\supset\operatorname{int}\Gamma$, где через $\operatorname{int}\Gamma$ обозначена дуга Γ без концевых точек.

В постановке (1) будем предполагать, что $h(w')\in L_2(\Gamma)$. В этом случае решение $\psi\,(w)$ существует и единственно в пространстве типа Харди $e_2\,(g,\,\Gamma)$, введенном в [2], а функция $\psi\,(w)$ имеет на Γ след $\psi(w')$, понимаемый в смысле предельных значений по всем некасательным путям, расположенным в g и оканчивающимся на Γ, и равный почти всюду $h(w')$.

Граничные мультиполи $\Omega_n\,(w)$ для области G с нулем в точке N и центром в $M=\infty$ определяются по формуле [3]

$$\Omega_n\,(w) := \operatorname{Im}\big[\mathscr{F}(w)\big]^n, \tag{2}$$

где $z=\mathscr{F}(w)$ — конформное отображение G на $\{\operatorname{Im} w>0\}$, причем $\mathscr{F}\,(N)=0$ и $\mathscr{F}\,(M)=\infty$. Система $\{\Omega_n\}$ полна и минимальна в $L_2(\Gamma)$ и, что очевидно, каждая из функций Ω_n гармонична в G и обращается в нуль на $\partial G\setminus M$. Основанный на мультиполях $\Omega_n\,(z)$ и указанных их свойствах метод (получивший одноименное название), заключается в том, что функция $\psi\,(w)$ — решение задачи (1) — строится в виде предела последовательности линейных комбинаций первых N мультиполей, т.е.

$$\psi\,(w)\,=\,\lim_{n\to N}\psi^N\,(w)\,,\qquad \psi^N\,(w)\,=\,\sum\nolimits_{n=1}^{N} a_n^N\,\Omega_n\,(w)\,. \tag{3}$$

Коэффициенты $\{a_n^N\}$ в формуле (3) могут быть найдены, например, из условия минимума их отклонения на Γ в норме L_2 от функции $h\,(w')$, т.е. из условия $\|\psi^N-h\|_{L_2\,(\Gamma)}=\min$, которое приводит, как нетрудно убедиться, к системе линейных уравнений

$$\sum\nolimits_{k=1}^{N} c_{nk}\,a_k^N\,=\,h_n\,,\quad n\,=\,1,\,2,\,\ldots,\,N\,; \tag{4}$$

здесь

$$c_{nk}\,=\,\big(\Omega_n,\,\Omega_k\big),\quad h_n\,=\,\big(h,\,\Omega_n\big)\,, \tag{5}$$

где через $\big(\cdot\,,\cdot\big)$ обозначено скалярное произведение в пространстве $L_2\,(\Gamma)$.

В [1, 2] доказано, что последовательность $\{\psi^N\,(w)\}$ сходится к решению задачи $\psi\,(w)$ в равномерной норме на любом компакте $E\,\subset\, g\cup\operatorname{int}\gamma$, причем эту последовательность можно дифферецировать любое число раз как в области g, так и на $\operatorname{int}\gamma\,\setminus\,(B\cup C)$. В [1] было показано, что эта сходимость имеет экспоненциальный характер. Отметим, что в силу своего построения метод мультиполей не требует построения какой–либо сетки.

Конформное отображение $z = \mathscr{F}(w)$, фигурирующее в формуле (2) для мультиполей, находится посредством обращения функции $z = \mathscr{F}^{-1}(w)$, обратной к $\mathscr{F}$. Для $\mathscr{F}^{-1}$ получено явное представление через гипергеометрическую функцию Гаусса

$$\mathscr{F}^{-1}(z) = K_0 \left(\frac{z}{l}\right)^{\beta} \frac{\mathrm{F}\Big(-\frac{\nu}{2},\, -\frac{\nu+1}{2};\; 1-\frac{\beta}{2};\; \big(\frac{l}{z}\big)^2\Big)}{\mathrm{F}\Big(\frac{\nu}{2},\, \frac{\nu+1}{2};\; 1+\frac{\beta}{2};\; \big(\frac{l}{z}\big)^2\Big)}\,, \tag{6}$$

где η — радиус закругления угла, β — величина угла, измеряемая по области, $\nu = (\beta-1)/2$, а параметры K_0 и l находятся по формулам

$$K_0 = \eta\ \operatorname{tg}(\pi\nu)\, e^{-i\pi\frac{\beta}{2}} \frac{\Gamma\Big(1+\frac{\beta}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{1-\nu}{2}\Big)\Gamma\Big(1-\frac{\nu}{2}\Big)}{\Gamma\Big(1-\frac{\beta}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{3}{2}+\frac{\nu}{2}\Big)\Gamma\Big(1+\frac{\nu}{2}\Big)}, \tag{7}$$

$$l = 2\left[\eta\, \frac{\beta\,\Gamma^2\Big(\frac{1}{2}+\nu\Big)}{2\,\kappa\,\Gamma^2(\nu)}\right]^{\frac{1}{\beta}}, \quad \kappa = \nu(\nu+1)\,. \tag{8}$$

Указанное обращение делается при помощи разложения представления (6) для $\mathscr{F}^{-1}$ в ряды специального вида в окрестностях прообразов некоторых точек ∂G и последующего обращения этих рядов. При этом области сходимости полученных рядов для $\mathscr{F}$ покрывают всю область G.

Проведенные в этой работе численные исследования подтвердили экспоненциальную скорость сходимости метода мультиполей в области и на дуге γ, показали высокую точность вычисления решения и его производных в области и в точках соответствующей гладкости γ при сравнительно небольшом числе степеней свободы (т. е. при небольшом N в выражении (3) для приближенного решения), а также выявили погранслойный эффект для погрешности вблизи γ. Кроме того, было проведено исследование поведения коэффициентов в указанных выше линейных комбинациях мультиполей при увеличении длины приближения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00503) и программы фундаментальных исследований ОМН РАН № 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Власов В. И.* Краевые задачи в областях с криволинейной границей. Докторская дисс. ВЦ АН СССР, 1990.
2. *Власов В. И.* О решении задачи Дирихле посредством разложения в ряд Фурье // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249, № 1. С. 19–22.
3. *Власов В. И.* О решении задачи Дирихле посредством разложения в ряд Фурье // Докл. АН СССР. 1977. Т. 237, № 5. С. 1012–1015.