Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 351–352

УДК 517.955

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ПРОГОНКИ

© В. А. Чадаев

askhabov@yandex.ru

Чеченский государственный университет, Грозный

Рассмотрим дифференциальное уравнение дробного порядка

$$Ly \equiv D_{0x}^{\alpha+1}y(t) + p(x)D_{0x}^{\beta}y(t) + q(x)y(x) = f(x)\,, \tag{1}$$

с граничными условиями

$$y(0) = y(r) = 0\,, \tag{2}$$

где D_{0x}^{τ} — оператор дробного (в смысле Римана – Лиувилля) дифференцирования порядка $0 < \tau \leq 2$ с началом в точке 0 и с концом в точке $x \in [0, r]$ [1], $0 < \alpha \leq 1$, $0 < \beta \leq 1$; $y(x) \in C^4[0, r]$ и $y(0) = 0$; $p(x), q(x) \in C[0, r]$.

Используя известное представление дробной производной [2]

$$D_{0x}^{\alpha}y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{y^{(k)}(0)}{\Gamma(\alpha - k + 1)} x^{k-\alpha} + D_{0x}^{-(m-\alpha)} y^{(m)}(t)$$

и учитывая условие (2), имеем

$$D_{0x}^{\alpha+1}y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(y'(0)x^{-\alpha} + \int_0^x y''(t)(x-t)^{-\alpha}dt \right), \tag{3}$$

$$D_{0x}^{\beta}y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^x y'(t)(x-t)^{-\beta}dt = \partial_{0x}^{\beta}y(t)\,, \tag{4}$$

где ∂_{0x}^{β} — регуляризованный оператор дробного порядка β [1].

Пусть $h = x/n$, тогда $x_i = i\,h$, где $i = \overline{0, n}$, $x_0 = 0$. Положим $y_i = y(x_i)$.

Пусть $S_k^{\alpha} = k^{1-\alpha}$ — степенная сеточная функция.

Перейдя к разностным аналогам [3] для (3) и (4) имеем

$$D_{0x_i}^{\alpha+1}y(t) \approx \Delta_{0x_i}^{\alpha+1}y(t) + R_{\alpha}(h, i)\,, \tag{5}$$

$$D_{0x_i}^{\beta}y(t) \approx \Delta_{0x_i}^{\beta}y(t) + R_{\beta}(h, i)\,, \tag{6}$$

где

$$\Delta_{0x_i}^{\alpha+1}y(t) = \frac{y'(0)x_i^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{h^{-1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^{i} \Delta^2 y_{k-1} \Delta S_{i-k}^{\alpha},$$

$$\Delta_{0x_i}^{\beta}y(t) = \frac{h^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{k=1}^{i} \Delta y_{k-1} \Delta S_{i-k}^{\beta},$$

$$R_\alpha(h,i) \le \frac{h^2}{12\,\Gamma(2-\alpha)} \max_{[0,x_i]} |y^{IV}(t)| x_i^{1-\alpha}\,, \quad R_\beta(h,i) \le \frac{h}{2\,\Gamma(2-\beta)} \max_{[0,x_i]} |y''(t)| x_i^{1-\beta}\,.$$

Отбросив последние слагаемые в правых частях (5) и (6), подставив полученные выражения в (1) имеем

$$L^h y \equiv \Delta_{0x_i}^{\alpha+1} y(t) + p(x_i)\Delta_{0x_i}^{\beta} y(t) + q(x_i) y(x_i) = f(x_i)\,.$$

Приведя подобные члены, получим систему n уравнений с n неизвестными. В матричной форме система уравнений имеет вид:

$$DY = F\,, \tag{7}$$

где матрица D является нижней почти треугольной или матрицей Хессенберга [4]. Алгоритм решения системы уравнений (7) назовем модифицированным методом "прогонки".

Пусть L_m , K_m — коэффициенты "прогонки". Тогда

$$y_m = L_m - K_m y_{m+1}\,, \quad m = 1, 2, \ldots, n-1\,.$$

Теорема. *Вычислительный процесс для нахождения L_m и K_m устойчив, если существует такое число $\varepsilon > 1+\alpha$, что для всех диагональных миноров D_m определителя D выполняется*

$$\frac{|D_{m-1}|}{|D_m|} = O(h^\varepsilon).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. *Нахушев А. М.* К теории дробного исчисления // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 2. С. 313–324.
3. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.
4. *Parlett B. N.* Global convergence of the basice QR-algorithm on Hessenberge matrices // Math. Comp. 1968. V. 22. P. 803–817.