

СИММЕТРИИ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

© А. А. Чесноков

chesnokov@hydro.nsc.ru

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Рассматриваются нелинейные уравнения, описывающие распространение длинных волн на пространственном сдвиговом потоке тяжелой идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей над ровным дном

$$u_t + uu_x + vu_y + wu_z - fv + gh_x = 0, \quad v_t + uv_x + vv_y + wv_z + fu + gh_y = 0,$$

$$h_t + \left(\int_0^h u dz \right)_x + \left(\int_0^h v dz \right)_y = 0, \quad w = - \int_0^z (u_x + v_y) dz'. \quad (1)$$

Здесь переменные t, x, y, z, u, v, w, h соответствуют времени, декартовым координатам, компонентам вектора скорости и глубине слоя жидкости; постоянные g, f — ускорение свободного падения и параметр Кориолиса. Давление в жидкости распределено гидростатично по глубине и восстанавливается по формуле $p = \rho g(h - z) + p_0$, где постоянные ρ, p_0 — плотность жидкости и давление на свободной границе.

Уравнения (1) для движений без сдвига скорости по вертикали, когда компоненты вектора скорости u и v не зависят от переменной z , при $f = 0$ принимают вид широко известной модели мелкой воды Сен-Венана [1, 2], а при $f \neq 0$ — квазигеострофической модели приближения « f – плоскости» средних широт [3, 4]. Модели, учитывающий сдвиговой характер движения, изучены в меньшей степени. Нелинейные уравнения (1) для сдвиговых течений при отсутствии кориолисова ускорения исследованы в работах [5, 6]. В них установлено существование простых волн, непрерывно примыкающих к стационарному сдвиговому потоку, сформулированы условия обобщенной гиперболичности стационарных уравнений. Вместе с тем результатов по точным решениям нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (1) известно крайне мало, поэтому представляет интерес их построение, анализ и физическая интерпретация.

В представленной работе система уравнений (1) впервые подвергнута систематическому исследованию методами группового анализа дифференциальных уравнений [7, 8]. Найдены 9-и мерные группы допускаемых преобразований G_9 , как в случае $f = 0$, так и для $f \neq 0$. Установлено, что при $f = 0$ допускаются переносы по времени и горизонтальным пространственным переменным, галилеевы переносы по x и y , два растяжения, вращение вокруг оси z и нетривиальное проективное преобразование. При этом структура соответствующей алгебры Ли L_9 аналогична структуре алгебры Ли допускаемых операторов для уравнений двумерных движений газа с показателем политропы $\gamma = 2$, для которой построена оптимальная система подалгебр [9]. В случае $f \neq 0$ система инвариантна относительно переносов по t, x, y , вращения вокруг оси z , одного растяжения и еще 4 достаточно сложных преобразований. Отметим, что алгебра Ли L_9 допускаемых операторов для квазигеострофической модели содержит подалгебру, имеющую структуру SO_3 (такую же как у трех операторов вращения). Для найденной группы преобразований построена оптимальная система подалгебр. «Оптимальность» состоит в том, что решения, получаемые с помощью ее представителей, исчерпывают все возможные инвариантные и частично инвариантные решения соответствующие подгруппам группы преобразований G_9 с точностью до замены переменных. Дальнейшее построение

решений сводится к нахождению инвариантов соответствующих подалгебр и интегрированию получаемых фактор-систем.

Исследован ряд инвариантных и частично инвариантных подмоделей, дана физическая интерпретация построенным точным решениям. Для моделей с учетом и без учета кориолисова ускорения подробно изучен класс стационарных вращательно симметричных течений. Показано, что при определенных распределениях скорости по глубине возникают области возвратного течения и дан алгоритм построения решения в этих областях. Приведен пример решения с критическим слоем, который выражается в элементарных функциях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Интеграционного проекта СО РАН № 2.15 и гранта для поддержки Ведущих научных школ НШ-5245.2006.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стокер Дж.* Волны на воде. Математическая теория и приложения. М.: ИЛ, 1959.
2. *Овсянников Л. В.* Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985.
3. *Majda A.* Introduction to PDEs and Waves for the Atmosphere and Ocean. New York: Courant Institute of Mathematical Sciences, 2003.
4. *Гилл А.* Динамика атмосферы и океана. М.: Мир, 1986.
5. *Тешуков В. М.* Пространственные простые волны на сдвиговом течении // 2002. Т. 43, № 5. С. 28–40.
6. *Тешуков В. М.* Пространственные стационарные длинные волны на сдвиговом потоке // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 2. С. 28–39.
7. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
8. *Овсянников Л. В.* Об оптимальных системах подалгебр // ДАН РАН. 1993. Т. 333, № 6. С. 702–704.
9. *Павленко А. С.* Симметрии и решения уравнений двумерных движений политропного газа // Сиб. электр. матем. изв. 2005. Т. 2. С. 291–307.