Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 356–356

УДК 517.95

РЕЗОНАНСНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С РАЗРЫВНЫМИ НЕОГРАНИЧЕННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

© Е. А. Чиж

ekaterina@csu.ru

Челябинский государственный университет, Челябинск

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса $C^{2,\mu}, 0 < \mu < 1$. Рассматривается задача

$$Au(x) - \lambda_1 u(x) + g(x, u(x)) = h(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1}$$

где λ_1 — наименьшее собственное значение равномерно эллиптического оператора A второго порядка с граничным условием (2), $h \in L^q(\Omega)$, $q > m$, а функция g удовлетворяет следующим ограничениям:

(g1) $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ борелева функция и существуют константа $C_1 > 0$ и функция $C_2 \in L^q(\Omega)$ $(q > m)$ такие, что $|g(x,\xi)| \leqslant C_1|\xi| + C_2(x)$ для любого $\xi \in \mathbb{R}$ и почти всех $x \in \Omega$;

(g2) функция $g(x,\cdot)$ при $\forall x \in \Omega$ может иметь разрывы только первого рода и $g(x,\xi) \in [g_-(x,\xi), g_+(x,\xi)]$ для любого $\xi \in \mathbb{R}$, где

$$g_-(x,\xi) = \liminf_{\eta\to\xi} g(x,\eta), \quad g_+(x,\xi) = \limsup_{\eta\to\xi} g(x,\eta).$$

Определение. *Обобщенным решением задачи* (1), (2) будем называть функцию $u \in W_q^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_q^1(\Omega)$, удовлетворяющую для почти всех $x \in \Omega$ включению

$$-Au(x) + \lambda_1 u(x) + h(x) \in [g_-(x, u(x)), g_+(x, u(x))].$$

Обозначим $\Omega_1 = \{x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) < r_1\}$, а $\Omega_2 = (\Omega \setminus \Omega_1)$, где r_1 — некоторое положительное число, а $d(x,\partial\Omega)$ — расстояние от точки x до границы $\partial\Omega$ в $\mathbb{R}^m$. Основным результатом является следующая теорема.

Теорема. *Предположим, что*

1) функция $g(x,\xi)$ удовлетворяет условиям (g1), (g2);

2) $\lim_{\xi\to\pm\infty}\inf \frac{g(x,\xi)}{\xi} \geq 0$ почти всюду на Ω;

3) существуют числа $r_1 > 0$ и $r_2 \geq 0$ такие, что

$$\int\limits_{\Omega_1} \sup_{\xi<0} g(x,\xi)\varphi(x)dx + \int\limits_{\Omega_2} \sup_{\xi<-r_2} g(x,\xi)\varphi(x)dx \leqslant \int_\Omega h(x)\varphi(x)dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega_1} \inf_{\xi>0} g(x,\xi)\varphi(x)dx + \int\limits_{\Omega_2} \inf_{\xi>r_2} g(x,\xi)\varphi(x)dx,$$

где $\varphi(x)$ — положительная собственная функция оператора A с граничным условием (2), соответствующая λ_1.

Тогда задача (1), (2) имеет обобщенное решение.

Заметим, что теорема обобщает соответствующий результат из [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта р-урал-а № 07-01-96000.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Iannacci R., Nkashama M. N., Ward J. R.* Nonlinear second order elliptic partial differential equations at resonance // Trans. Am. Math. Soc. 1989. V. 311, N 2. P. 711–726.