Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 357–358

УДК 517.95

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

© Н. А. Чуешева

chuesheva@ngs.ru

Кемеровский государственный университет, Кемерово

Вопросами разрешимости краевых задач для уравнений высокого порядков занимались многие авторы. Например, А. А. Дезин, В. П. Михайлов, Ю. А. Дубинский, С. Г. Пятков, А. И. Кожанов, В. В. Врагов, И. Е. Егоров и другие авторы.

Пусть в области $D=\{(x,y,t):0<x<\pi, 0<y<\pi, 0<t<a\}$ задано уравнение

$$-u_{ttt}+u_{xxxx}+u_{yyyy}+u_{xx}+u_{yy}+u_{tt}-u_t=f(x,y,t) \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$u|_{t=0}=u_t|_{t=0}=u_t|_{t=a}=u|_{x=0,x=\pi}=u|_{y=0,y=\pi}=0;$$

$$u_{xx}|_{x=0,x=\pi}=u_{yy}|_{y=0,y=\pi}=0. \tag{2}$$

Теорема. *Пусть правая часть уравнения (1) функция $f(x,y)\in L_2(D)$, число $a>0$ мало. Тогда существует и притом единственное решение краевой задачи (2) для уравнения (1), принадлежащее пространству $H(D)$.*

Здесь пространство $H(D)$ является замыканием класса функций пространства $C^\infty(\overline{D})$, удовлетворяющих краевым условиям (2). Норма в этом пространстве задаётся равенством

$$\|u\|^2_{H(D)}=\int\limits_D (u^2_{xx}+u^2_{yy}+u^2_{tt}(a-t)+u_t^2+u^2)dD.$$

Для доказательства этой теоремы использовалась комбинация методов, например, как в [1–3].

Интересен вопрос, будет ли корректна эта краевая задача для этого уравнения. Оказывается, что можно в этом случае построить пример неединственности решения такой задачи для уравнения

$$-u_{ttt}+u_{xxxx}+u_{yyyy}+u_{xx}+u_{yy}+u_{tt}-u_t=0$$

в области $D=\{(x,y,t):0<x<\pi,\ 0<y<\pi,\ 0<t<\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\}$ с краевыми условиями

$$u|_{t=0}=u_t|_{t=0}=u_t|_{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}=0$$

$$u|_{x=0,x=\pi}=u|_{y=0,y=\pi}=u_{xx}|_{x=0,x=\pi}=u_{yy}|_{y=0,y=\pi}=0.$$

Ненулевым решением такой задачи будет

$$u=\left(\sqrt{3}+e^{\frac{t}{2}}\left(\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t-\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)\cdot\sin x\cdot\sin y.$$

Аналогично [4] можно построить пример неустойчивости решения уравнения

$$-u^n_{ttt}+u^n_{xxxx}+au^n_{yyyy}+bu^n_{xx}+cu^n_{yy}+du^n_{tt}-hu^n_t=0 \tag{3}$$

в области $D = \{x, y, t : 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi,\ t > 0\}$ с начально-краевыми условиями

$$u^n|_{t=0} = \frac{\sin n^m x \sin n^p y}{n^q}, \quad u^n_t|_{t=0} = \frac{n^k\ \sin n^m x \sin n^p y}{n^q},$$

$$u^n_{tt}|_{t=0} = \frac{n^{2k} \sin n^m x \sin n^p y}{n^q}, \quad u^n|_{x=0,x=\pi} = u^n|_{y=0,y=\pi} = 0, \tag{4}$$

$$u^n_{xx}|_{x=0,x=/pi} = u^n_{yy}|_{y=0,y=\pi} = 0.$$

Рассмотрим функцию

$$u^n(x, y, t) = \frac{e^{n^k t} \cdot \sin n^m x \cdot \sin n^p y}{n^q}.$$

Приведём три примера условий на коэффициенты a, b, c, d, h уравнения и натуральные числа k, m, p, q в начальных условиях (4), при которых нулевое решение поставленной задачи будет неустойчиво.

Пример 1. $a = c = 1$, $b = d = h = 0$, $k = 8$, $m = 3$, $p = 6$, $q = 24$.

Пример 2. $c = d = 1$, $a = b = h = 0$, $k = 4$, $m = 3$, $p = 4$, $q = 12$.

Пример 3. $a = h = 1$, $b = c = d = 0$, $k = 4$, $m = 3$, $p = 1$, $q = 12$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Врагов В. Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: Изд-во Носиб. ун-та, 1983. 84 с.
2. *Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. В.* Неклассические дифференциально-операторные уравнения. Новосибирск: Изд-во Наука, 2000. 336 с.
3. *Кожанов А. И.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики нечетного порядка. Новосибирск: Изд-во Носиб. ун-та, 1990. 132 с.
4. *Чуешева Н. А.* Краевые задачи для некоторых уравнений третьего порядка // Вестник Кемеровского ун-та. 2001. № 3(7). С. 193–199.