

УДК 517.948.34

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

© М. К. Дауылбаев*, К. Ж. Тлеубердин

* dauyl@kazsu.kz

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ линейное интегро-дифференциальное уравнение с малым параметром $\varepsilon > 0$:

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon y^{(n)} + A_1(t)y^{(n-1)} + \dots + A_n(t)y = F(t) + \int_a^1 [H_0(t, x)y(x, \varepsilon) + H_1(t, x)y'(x, \varepsilon) + \dots + H_{n-1}(t, x)y^{(n-1)}(x, \varepsilon)]dx \quad (1)$$

с начальными условиями в правой точке $t = 1$:

$$y(1, \varepsilon) = \alpha_0, \quad y'(1, \varepsilon) = \alpha_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(1, \varepsilon) = \alpha_{n-1}, \quad (2)$$

где α_i , $i = \overline{0, n-1}$ — известные постоянные, а $0 \leq a < 1$. Случай $a = 0$ рассмотрен в работах [1–3].

Пусть выполнены следующие условия:

- I. Функции $A_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, $F(t)$ на отрезке $[0, 1]$, а $H_i(t, x)$, $i = \overline{0, n-1}$ в области $D = (0 \leq t \leq 1, a \leq x \leq 1)$ являются достаточно гладкими.
- II. $A_1(t) \geq \gamma = \text{const} > 0$, $0 \leq t \leq 1$.
- III. Число $\lambda = 1$ при достаточно малых ε не является собственным значением ядра

$$K_\varepsilon(t, s) = K(t, s) - \frac{H_{n-1}(t, 1)}{A_1(1)} \exp \left(\int_s^1 \frac{A_2(x)}{A_1(x)} dx - \frac{1}{\varepsilon} \int_s^1 A_1(x) dx \right) + O(\varepsilon),$$

где

$$K(t, s) = \frac{1}{A_1(s)} \left[H_{n-1}(t, s) + \frac{1}{\bar{W}(s)} \int_s^1 \sum_{j=0}^{n-1} H_j(t, x) \bar{W}_{n-1}^{(j)}(x, s) dx \right].$$

Здесь $\bar{W}(t)$ — вронскиан фундаментальной системы решений $\bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_{n-1}(t)$ вырожденного однородного дифференциального уравнения $L_0 \bar{y} = 0$, а $\bar{W}_{n-1}^{(j)}(t, s)$ — определитель, получаемый из вронскиана $\bar{W}(s)$ заменой его $(n-1)$ -ой строки строкой $\bar{y}_1^{(j)}(t), \dots, \bar{y}_{n-1}^{(j)}(t)$.

IV.

$$\bar{\omega}(1) = \begin{vmatrix} T_1(1) & \dots & T_{n-1}(1) \bar{H}_n(1) \\ \dots & \dots & \dots \\ T_1^{(n-2)}(1) & \dots & T_{n-1}^{(n-2)}(1) \bar{H}_n^{(n-2)}(1) \\ \bar{T}_1^{(n-1)}(1) & \dots & \bar{T}_{n-1}^{(n-1)}(1) \bar{H}_n^{(n-1)}(1) \end{vmatrix} \neq 0,$$

где $\bar{T}_i^{(n-1)}(t) \equiv T_i^{(n-1)}(t) + S_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, $\bar{\bar{H}}_n^{(n-1)}(t) \equiv \bar{H}_n^{(n-1)}(t) + \tilde{H}_n(t)$, а функций $T_i^{(j)}(t)$, $\bar{H}_n^{(j)}(t)$, $S_i(t)$, $\tilde{H}_n(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{0, n-1}$ определенным образом выражаются через коэффициенты уравнения (1).

Как известно из [4, 5], решение дифференциального уравнения, получаемого из (1) при $H_i(t, x) \equiv 0$, $i = \overline{0, n-1}$, уходит на бесконечность при $\varepsilon \rightarrow 0$ в полуинтервале $0 \leq t < 1$ и не имеет конечного предела. В настоящей работе исследуется вопрос: асимптотическое поведение решения интегро-дифференциальной задачи (1), (2) аналогично ли указанному асимптотическому поведению решения чисто дифференциальной задачи?

Теорема. Пусть выполнены условия I-IV. Тогда на отрезке $[a, 1]$ для решения $y(t, \varepsilon)$ задачи (1), (2) справедливы следующие асимптотические при $\varepsilon \rightarrow 0$ оценки:

$$\begin{aligned} |y^{(i)}(t, \varepsilon)| &\leq \frac{K}{\bar{\omega}(1)} (|\alpha_0| + \dots + |\alpha_{n-1}| + \|F(t)\|), \quad i = \overline{0, n-3}, \\ |y^{(n-2)}(t, \varepsilon)| &\leq \frac{K}{\bar{\omega}(1)} \left(1 + \exp \left(-\gamma \frac{t-a}{\varepsilon} \right) \right) (|\alpha_0| + \dots + |\alpha_{n-1}| + \|F(t)\|), \\ |y^{(n-1)}(t, \varepsilon)| &\leq \frac{K}{\bar{\omega}(1)} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \exp \left(-\gamma \frac{t-a}{\varepsilon} \right) \right) (|\alpha_0| + \dots + |\alpha_{n-1}| + \|F(t)\|), \end{aligned}$$

где $K > 0$, $\gamma > 0$ — некоторые постоянные, не зависящие от ε .

Из теоремы следует, что асимптотическое поведение решения интегро-дифференциальной задачи (1), (2) качественно отличается от поведения решений чисто дифференциальной задачи, т.е. при $\varepsilon \rightarrow 0$ не уходит на бесконечность на всем интервале $0 \leq t < 1$, а только на $0 \leq t < a$. На $a < t \leq 1$, решение интегро-дифференциальной задачи (1), (2) имеет конечный предел при $\varepsilon \rightarrow 0$. При $a = 1$ интегро-дифференциальное уравнение (1) обращается в дифференциальное уравнение и его решение стремится к бесконечности на промежутке $0 \leq t < 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Касымов К. А., Дауылбаев М. К. Об оценке решений задачи Коши с начальным скачком любого порядка для линейных сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35, № 6. С. 822–830.
2. Дауылбаев М. К., Касымов К. А. Задача Коши с начальными скачками для линейных сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений / Ред. Сиб. мат. журн. Сиб. отд. РАН, Новосибирск, 2003. 20 с. (Деп. в ВИНТИ, 13.03.2003, № 449-В 2003).
3. Касымов К. А., Дауылбаев М. К. Сингулярно возмущенные линейные интегро-дифференциальные уравнения с начальными скачками любого порядка // Известия вузов. Математика. 2003. № 7(494). С. 70–74.
4. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
5. Иманалиев М. И. Асимптотические методы в теории сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных систем. Фрунзе: Илим, 1972. 356 с.
6. Веква Н. П. О некоторых интегро-дифференциальных уравнениях с малым параметром // Сообщения АН Грузинской ССР. 1964. Т. 36, № 3.