

УДК 517.956

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

© Т. И. Дёмина

de_ta@rambler.ru

НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик

В области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}$ рассмотрим телеграфное уравнение

$$u_{xx} - u_{yy} - cu = 0, \quad c = \text{const} \neq 0. \quad (1)$$

Выпишем краевые условия, которые будут использованы при постановке смешанных задач для уравнения (1):

$$u(0, y) = \mu_0(y), \quad u(a, y) = \mu_a(y), \quad 0 < y < b, \quad (2)$$

$$u_y(x, b) = \nu_b(x), \quad 0 < x < a, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 < x < a, \quad (4)$$

$$u(x, b) = \varphi(x), \quad 0 < x < a, \quad (5)$$

$$u_y(x, 0) = \nu(x), \quad 0 < x < a. \quad (6)$$

Регулярным решением уравнения (1) называется решение, которое непрерывно в области Ω вместе со своими частными производными до второго порядка.

ЗАДАЧИ 1 – 3. Найти регулярное в области Ω решение $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее следующим краевым условиям: в случае 1 выполняются условия (2), (3), (4); в случае 2 — условия (2), (5), (6); в случае 3 — условия (2), (3), (6).

Используя метод разделения переменных, а также результаты работ [1, 2], доказаны теоремы.

Теорема 1. Пусть

1) $\nu_b(x), \tau(x) \in C^4[0, a], \mu_i(y) \in C^4[0, b], i = 0, a;$

2) $\nu_b^{(n)}(0) = \nu_b^{(n)}(a), \mu_i^{(n)}(0) = \mu_i^{(n)}(b), \tau^{(n)}(0) = \tau^{(n)}(a), n = 0, 2, \nu_b^{(n)}(a) = \tau^{(n)}(a) = \mu_i^{(n)}(b) = 0, i = 0, a, n = 1, 3;$

3) $\int_0^a \nu_b^{(4)}(x) \sin \lambda_{4k} x dx = O(\sin \lambda_{3k} b), \int_0^a \tau^{(4)}(x) \sin \lambda_{4k} x dx = O(\sin \lambda_{3k} b), \int_0^b \mu_i^{(4)}(y) \sin \lambda_{2k} y dy = O(\sin \lambda_{1k} a), i = 0, a, \lambda_{1k} = \sqrt{\frac{\pi^2(1+2k)^2}{4b^2} - c}, \lambda_{2k} = \frac{\pi(1+2k)}{2b}, \lambda_{3k} = \sqrt{\frac{\pi^2 k^2}{a^2} + c}, \lambda_{4k} = \frac{\pi k}{a};$

4) $\lambda_{1k} a \neq \pi m, \lambda_{3k} b \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, k, m = 1, 2, \dots$

Тогда существует единственное решение задачи 1.

Теорема 2. Пусть

1) $\varphi(x), \nu(x) \in C^4[0, a], \mu_i(y) \in C^4[0, b], i = 0, a;$

2) $\varphi^{(n)}(0) = \varphi^{(n)}(a), \nu^{(n)}(0) = \nu^{(n)}(a), \mu_i^{(n)}(b) = 0, n = 0, 2, \mu_i^{(n)}(0) = \mu_i^{(n)}(b), \varphi^{(n)}(a) = \nu^{(n)}(a) = 0, i = 0, a, n = 1, 3;$

3) $\int_0^b \mu_i(y) dy = 0, i = 0, a;$

4) $\int_0^a \varphi^{(4)}(x) \sin \lambda_{4k} x dx = O(\cos \lambda_{3k} b), \int_0^a \nu^{(4)}(x) \sin \lambda_{4k} x dx = O(\cos \lambda_{3k} b), \int_0^b \mu_i^{(4)}(y) \cos \lambda_{2k} y dy = O(\sin \lambda_{1k} a), i = 0, a, \lambda_{1k} = \sqrt{\frac{\pi^2(1+2k)^2}{4b^2} - c}, \lambda_{2k} = \frac{\pi(1+2k)}{2b}, \lambda_{3k} = \sqrt{\frac{\pi^2 k^2}{a^2} + c}, \lambda_{4k} = \frac{\pi k}{a};$

5) $\lambda_{1k}a \neq \pi m$, $\lambda_{3k}b \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$, $k, m = 1, 2, \dots$

Тогда существует единственное решение задачи 2.

Теорема 3. Пусть

1) $\nu_b(x)$, $\nu(x) \in C^4[0, a]$, $\mu_i(y) \in C^4[0, b]$, $i = 0, a$;

2) $\nu_b^{(n)}(0) = \nu_b^{(n)}(a)$, $\nu^{(n)}(0) = \nu^{(n)}(a)$, $\mu_i^{(n)}(b) = 0$, $n = 0, 2$, $\mu_i^{(n)}(0) = \mu_i^{(n)}(b)$, $\nu_b^{(n)}(a) = \nu^{(n)}(a) = 0$, $i = 0, a$, $n = 1, 3$;

3) $\int_0^a \nu_b^{(4)}(x) \sin \lambda_{4k}x \, dx = O(\cos \lambda_{3k}b)$, $\int_0^a \nu^{(4)}(x) \sin \lambda_{4k}x \, dx = O(\cos \lambda_{3k}b)$, $\int_0^b \mu_i^{(4)}(y) \cos \lambda_{2k}y \, dy = O(\sin \lambda_{1k}a)$, $i = 0, a$, $\lambda_{1k} = \sqrt{\frac{\pi^2 k^2}{b^2} - c}$, $\lambda_{2k} = \frac{\pi k}{b}$, $\lambda_3 = \lambda_{3k} = \sqrt{\frac{\pi^2 k^2}{a^2} + c}$, $\lambda_4 = \lambda_{4k} = \frac{\pi k}{a}$;

4) $\lambda_{1k}a \neq \pi m$, $\lambda_{3k}b \neq \pi m$, $k, m = 1, 2, \dots$

Тогда существует единственное решение задачи 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dunninger D. R., Zachmanoglov E. C. The condition for uniqueness of the Dirichlet problem for hiperbolic equations in cilindrical domains // J. Math. Mech. 1969. V. 18, N 8.
2. Дёмина Т. И. Критерий единственности решения смешанных задач для гиперболического уравнения в цилиндрической области // Известия Кабардино-Балкарского Научного центра РАН. 2004. № 2(12). С. 112 – 115.