Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 119–120

УДК 517.95

О СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В КЛАССАХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО РАСТУЩИХ НАЧАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

© В. Н. Денисов

V.Denisov.g23@g23.relcom.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

Изучаются достаточные условия на младшие коэффициенты параболического уравнения, при выполнении которых решение задачи Коши

$$\Delta u+\bar b(x,t)\nabla u+c(x,t)u-\frac{\partial u}{\partial t}=0,\quad x\in\mathbb{R}^N,\quad t>0, \tag{1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in\mathbb{R}^N, \tag{2}$$

имеет предел

$$\lim_{t\to\infty}u(x,t)=0 \tag{3}$$

равномерно по x на любом компакте K в $\mathbb{R}^N$, при любой начальной функции $u_0(x)$, растущей на бесконечности не быстрее, чем $|x|^m e^{a|x|^n}$, $a>0$, где

$$\bar b(x,t)\cdot\nabla u=\sum_{i=1}^N b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i},\quad c(x,t)\leqslant 0,\quad x\in\mathbb{R}^N,\quad t>0.$$

Коэффициенты $b_1(x,t)$, $\ldots$, $b_N(x,t)$ удовлетворяют условию

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N,\,t>0}(1+|x|)\sum_{i=1}^N|b_i(x,t)|=B<\infty. \tag{4}$$

Будут изучены две группы условий (C_1), (V_1) и (C_2), (V_2).

Условие (C_1)**.** Существуют постоянные $\alpha>0$, $0<k<1$ такие, что

$$c(x,t)\leqslant-\frac{\alpha^2}{|x|^{2k}},\quad |x|>1,\ t>0.$$

Условие (V_1)**.** Существуют постоянные $a>0$, $0<k<1$ такие, что

$$|u_0(x)|\leqslant C\,(1+|x|)^{\alpha_1}\cdot\exp\{a|x|^{1-k}\},\quad x\in\mathbb{R}^N,\ \alpha_1=\alpha_1(N,k,B).$$

Условие (C_2)**.** Существуют постоянные $\beta>0$, $0<l<1$ такие, что

$$c(x,t)\leqslant-\beta^2(1+|x|^{2l}),\quad |x|\in\mathbb{R}^N,\ t>0.$$

Условие (V_2)**.** Существуют постоянные $\alpha_2>0$, $b>0$, $0<l<1$ такие, что

$$|u_0(x)|\leqslant C\,(1+|x|)^{-\alpha_2}\cdot\exp\{b\,|x|^{1+l}\},\quad x\in\mathbb{R}^N,\ \alpha_2=\alpha_2(N,l,B).$$

Теорема 1. *Пусть коэффициенты* $b_1(x,t)$, ..., $b_N(x,t)$ *удовлетворяют* (4), *и для некоторых* $a > 0$, $0 < k < 1$ *функция* $u_0(x)$ *удовлетворяет условию* (V_1), *а коэффициент* $c(x,t)$ *удовлетворяет условию* (C_1) *при*

$$\alpha > a(1-k). \tag{5}$$

Тогда решение задачи Коши (1), (2) *имеет предел* (3) *равномерно по* x *на любом компакте* K *в* $\mathbb{R}^N$.

Замечание. Условие (5) является точным и не может быть заменено на $\alpha \leqslant a(1-k)$.

Теорема 2. *Пусть коэффициенты* $b_1(x,t)$, ..., $b_N(x,t)$ *удовлетворяют* (4), *и для некоторых* $b > 0$, $0 < l < 1$ *функция* $u_0(x)$ *удовлетворяет условию* (V_2), *а коэффициент* $c(x,t)$ *удовлетворяет условию* (C_2) *при*

$$\beta > b(1+l). \tag{6}$$

Тогда решение задачи Коши (1), (2) *имеет предел* (3) *равномерно по* x *на любом компакте* K *в* $\mathbb{R}^N$.

Замечание. Условие (6) является точным и не может быть заменено на $\beta \leqslant b(1+l)$.

Обзор работ по стабилизации см. [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 06-01-00288).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Денисов В. Н.* О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени // Успехи матем. наук. 2006. Т. 60, № 4. С. 145–212.