Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 136–137

УДК 517.958:539.4

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ

© В. Л. Дильман

dilman@74.ru

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск

В сообщении рассматривается напряженное состояние мягкой поперечной неоднородной прослойки прямоугольного сечения в листовом образце (плоская деформация) под растягивающей нагрузкой. Напряженное состояние неоднородного пластического слоя при плоской деформации описывается системой уравнений

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0, \tag{2}$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4Z(x,y)^2, \tag{3}$$

которая содержит три неизвестных безразмерных компонента тензора напряжений σ_x, σ_y, $\tau_{xy} = \tau$, т. е. замкнута в напряжениях. Здесь (1) и (2) — уравнения равновесия, (3) — условие пластичности Мизеса, $Z(x,y)$ — предел текучести. Основной материал и материал прослойки предполагаются однородными и изотропными, с одинаковыми механическими характеристиками в упругой зоне, но с разными пределами текучести. Носителем системы (1)–(3) является прямоугольная область, моделирующая поперечное сечение прослойки. Из соображений симметрии рассматривается четверть сечения: $x \in [0;1]$, $y \in [0;\chi]$, где χ — относительная толщина прослойки. Имеют место граничные условия

$$\tau(0,y) = 0, \quad \sigma_x(1,y) = 0, \quad \tau(1;y) = 0, \quad \tau(x;0) = 0.$$

Пусть в каждый момент нагружения известно наибольшее значение τ на контактной поверхности:

$$\tau(x_0,\chi) = \max \tau(x,\chi) = \alpha, \quad 0 < \alpha \leqslant 1, \quad x \in [0;1]$$

Обозначения: $Z(x,\chi) = K_c$ (считаем $Z(x,0) = 1$); K — коэффициент механической неоднородности соединения, то есть отношениепредела текучести основного материала соединения к K_c. По условию, K >1.

Система (1)–(3) исключением неизвестной σ_y сводится к квазилинейной системе уравнений гиперболического типа, которая в характеристической форме [1] в случае, когда функция Z зависит от одной переменной, может быть записана в виде (когда Z зависит y):

$$\frac{d(\sigma_x + \nu_i)}{dy} = \frac{dZ}{dy}\left(-1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{Z}\right)^2 \pm \frac{1}{3}\left(\frac{\tau}{Z}\right) - \ldots\right), \qquad i = 1,2, \tag{4}$$

где

$$\nu_i = \sqrt{Z^2 - \tau^2} \pm \arcsin \tau/Z, \qquad i = 1;2.$$

В случае, когда τ относительно мала (наиболее важный случай в приложениях к сварным соединениям), уравнения (4) приближенно интегрируются вдоль характеристик:

$$\sigma_x + \nu_i - Z = \mathrm{const}\,. \tag{5}$$

Например, если $\max\tau \leq 0,3$, относительная ошибка в последнем равенстве составляет около 0,02. Точнее говоря, имеет место

Предложение 1. *Относительная ошибка в равенстве (5) не превышает*

$$\frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{K_c-1}{K_c}+\frac{\alpha}{3(1-\alpha)}\right).$$

Формула (5) позволяет, применяя известную методику [2], вычислить максимальные значения касательных напряжений на контактной поверхности.

Предложение 2. *В пределах точности, указанной в предложении 1,*

$$\alpha=\max\tau(\chi)=\frac{2K_c(K-1)}{1+K_c}\left(1+\frac{(K-K_c^2)(K-1)}{K(1+K_c)^2}\right).$$

Пусть γ — острый угол наклона характеристики к положительному направлению оси OX. Уравнения (5) позволяют получить результат, обобщающий теорему H. Hencky [3].

Теорема. *В пределах указанной точности на характеристиках с положительным углом наклона к оси OX*

$$\sigma_x=Z(2\gamma-\pi/2-\sin 2\gamma+1)+C,\qquad \sigma_y=Z(2\gamma-\pi/2+\sin 2\gamma+1)+C;$$

на характеристиках с отрицательным углом наклона к оси OX

$$\sigma_x=Z(-2\gamma+\pi/2-\sin 2\gamma+1)+C,\qquad \sigma_y=Z(-2\gamma+\pi/2+\sin 2\gamma+1)+C.$$

При $Z=1$ отсюда получаются известные формулы [3].

Полученные результаты, в частности, формула предложения 2, позволяют, с помощью методики работы [4], найти напряженное состояние и предельную нагрузку для мягкой прослойки переменной прочности, расположенной поперек растягиваемой полосы, в практически важном случае, когда основной материал в зонах вблизи прослойки вовлекается в пластическую деформацию.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 05-08-18179).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 688 с.
2. *Дильман В. Л.* Напряженное состояние и прочность неоднородных соединений, содержащих трещиноподобные поверхностные макродефекты на границе твердого и мягкого участков // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2002. Т. 9, вып. 1. С. 186–187.
3. *Генки Г. О.* О некоторых статически определимых случаях равновесия в пластических средах // Теория пластичности / Под. ред. Ю.Н.Работнова. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. С. 80–101.
4. *Дильман В. Л., Остсемин А. А.* Напряженное состояние пластического слоя с переменной прочностью по толщине // Изв.РАН. Механика твердого тела. 2000. № 1. С. 141–148.