

НЕКОРРЕКТНАЯ ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА С ОБРАТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

© Ю. Ф. Долгий, П. Г. Сурков

Yurii.Dolgii@usu.ru, oakjar@gmail.com

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург

Постановка задачи. Рассматривается линейная система дифференциальных уравнений с последствием

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-r}^0 d_s \eta(t, s) x(t + s), \quad (1)$$

где $t \in \mathbb{R}$, $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $r > 0$. Матричная функция η измерима по Лебегу на множестве $\mathbb{R} \times [-r, 0]$ и $\eta(\cdot, 0) = 0$. Для почти всех $t \in \mathbb{R}$ существует конечная вариация $v(t) = \text{var}_{[-r, 0]} \eta(t, \cdot)$ и функция v локально интегрируема по Лебегу на $\mathbb{R}$. При указанных условиях система (1) для любого начального момента $t_0 \in \mathbb{R}$ и произвольной функции $\varphi \in \mathbf{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ имеет единственное решение $x(\cdot, t_0, \varphi)$ на полуоси $[-r, +\infty)$, удовлетворяющее условию $x(s, \varphi) = \varphi(s)$ при $s \in [-r, 0]$ [1]. При продолжении этого решения на полуось $(-\infty, -r)$ возникают большие проблемы, связанные с некорректностью этой задачи. При ее решении удобно использовать функциональное пространство состояний $\varphi \in \mathbf{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, выбирая в качестве элементов решений системы (1) при $t > t_0$ функции $x_t(\vartheta, t_0, \varphi) = x(t + \vartheta, t_0, \varphi)$, $\vartheta \in [-r, 0]$, $\varphi \in \mathbf{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ [2]. Использование функционального пространства состояний позволяет ввести эволюционное описание рассматриваемой системы $x_t(\vartheta, t_0, \varphi) = (T(t, t_0)\varphi)(\vartheta)$, $\vartheta \in [-r, 0]$, $\varphi \in \mathbf{C}([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, $t > t_0$. В работе [3] показано, что при дополнительных требованиях для функции η операторы $T(t, t_0)$, $t > t_0$, допускают расширения по непрерывности на сепарабельное пространство $\mathbf{H} = \mathbb{R}^n \times \mathbf{L}_2([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ со скалярным произведением $(\varphi, \psi) = \psi^\top(0)\varphi(0) + \int_{-r}^0 \psi^\top(s)\varphi(s)ds$ и являются вполне непрерывными при $t \geq t_0 + r$. Предполагаем эти требования выполненными. Задача продолжения решения системы (1) в сторону убывания времени тесно связана с некорректной задачей восстановления предыстории $\varphi \in \mathbf{H}$ динамического процесса, порождаемого этим решением, по его истории $x_t(\vartheta, t_0, \varphi)$, $t > t_0$. Произвольный элемент $u \in \mathbf{H}$ будем считать некоторым приближением точной истории динамического процесса в фиксированный момент времени t . Тогда для приближенного восстановления предыстории $\varphi \in \mathbf{H}$ в произвольный момент времени t_0 , $t_0 < t$, требуется найти решение уравнения

$$T\varphi = T(t, t_0)\varphi = u. \quad (2)$$

При решении поставленной задачи будем использовать метод регуляризации [4].

Регуляризованные решения. Нахождение регуляризованного решения уравнения (2) связано с поиском элемента φ_α , минимизирующего функционал $M^\alpha[\varphi, u] = (T\varphi - u, T\varphi - u) + \alpha\Omega[\varphi]$, $\varphi, u \in \mathbf{H}$, где Ω — стабилизирующий функционал, а параметр регуляризации α определяется как функция допустимой погрешности δ из уравнения невязки $(T\varphi_\alpha - u, T\varphi_\alpha - u) = \delta^2$. Стабилизирующий функционал имеет вид $\Omega[\varphi] = \int_{-r}^0 (\varphi^\top(s)Q(s)\varphi(s) + \varphi'^\top(s)P(s)\varphi'(s))ds + \varphi^\top(0)G\varphi(0)$, где G , $Q(s)$, $P(s)$, $s \in [-r, 0]$, — положительно определенные матрицы, и элементы матричной функции Q интегрируемы с квадратом по Лебегу, а матричной функции

P — дифференцируемы и их производные интегрируемы с квадратом по Лебегу. Регуляризованное решение φ_α удовлетворяет системе интегродифференциальных уравнений

$$(T^*T\varphi)(\vartheta) + \alpha \left(Q(\vartheta)\varphi(\vartheta) - (P(\vartheta)\varphi'(\vartheta))' \right) = (T^*u)(\vartheta), \quad \vartheta \in [-r, 0], \quad (3)$$

с краевыми условиями

$$(T^*T\varphi)(0) + \alpha (G\varphi(0) - P(0)\varphi'(0)) = (T^*u)(0), \quad \varphi'(-r) = 0.$$

Для получения явной формы системы (3) и краевых условий необходимо использовать представления оператора T и сопряженного к нему оператора T^* .

Краевые задачи. Рассмотрим задачу продолжения решений системы

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)x(t-r) \quad (4)$$

в сторону убывания времени. Здесь элементы матричной функции A локально интегрируемы по Лебегу, а элементы матричной функции B локально интегрируемы с квадратом по Лебегу на $\mathbb{R}$. Пусть $t_0 = 0$, $t = mr$ и $T = T(mr, 0)$, где m — натуральное число. Тогда краевую задачу для системы интегродифференциальных уравнений (3) можно заменить на краевую задачу для обыкновенных дифференциальных уравнений [5]. Алгоритм продолжения решений системы (4) в сторону убывания времени можно упростить, если применить итерационную процедуру. В ней строится последовательность регуляризованных решений $\varphi_{k\alpha}$ при следующих условиях: $t_0 = (k-1)r$, $t = kr$, $T = T(kr, (k-1)r)$, $u = \varphi_{(k-1)\alpha}$, $k = 1, 2, \dots$, $\varphi_{0\alpha} \in \mathbf{H}$. В стационарном случае, при выполнении условия $\det B \neq 0$, краевая задача определяющая регуляризованные решения в итерационной процедуре имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_k'' &= P^{-1}Q\varphi_k + \alpha^{-1}P^{-1}(\psi_k - \varphi_{k-1}), \\ \psi_k' &= -(B^{-1}AB)^\top \psi_k - B^\top \chi_k, \\ \chi_k' &= A\chi_k + B\varphi_k, \\ \varphi_k(0) &= \chi_k(-r), \varphi_k'(-r) = 0, \psi_k(0) = B^\top \chi_k(0), \\ \psi_k(-r) + \alpha B^\top (G\varphi_k(0) + P\varphi_k'(0)) &= \varphi_{k-1}(-r), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Краевая задача сингулярно зависит от параметра регуляризации α . Получены асимптотические формулы для регуляризованных решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
2. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
3. Долгий Ю. Ф. Характеристическое уравнение в задаче асимптотической устойчивости периодической системы с последействием // Труды института математики и механики. Екатеринбург: УрО РАН, 2005. Т. 11, № 1. С. 85–96.
4. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
5. Долгий Ю. Ф., Путилова Е. Н. Продолжение назад решений линейного дифференциального уравнения с запаздыванием как некорректная задача // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 8. С. 1317–1323.