

УДК 517.9

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ОСРЕДНЕНИЕ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В СРЕДАХ С РАЗЛИЧНЫМИ ПЕРИОДАМИ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ

© В. Ю. Дубинская

DubinskajaW@yandex.ru

Московский физико-технический институт, Долгопрудный

Введение. Численный анализ дифференциальных уравнений, описывающих различные процессы в композиционных материалах, нередко требует настолько большого количества вычислений, что становится практически нереализуемым. Метод асимптотического осреднения позволяет заменять исходные уравнения на уравнения с т. н. эффективными коэффициентами, которые либо постоянны, либо меняются слабо. Численное решение осредненных задач существенно менее трудоемко.

Постановка задачи. В области трёхмерного пространства

$$\Omega = \{x \in \mathbf{R}^3 : 0 < x_1 < T_1, 0 < x_2 < T_2, |x_3| < h/2\}$$

рассматривается следующая краевая задача:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}u &\equiv \frac{\partial}{\partial x_m} \left(a_{mn} \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\delta}, \frac{x_3}{h} \right) \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = f(x_1, x_2), \quad x \in \Omega; \\ a_{3n} \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\delta}, \frac{x_3}{h} \right) \frac{\partial u}{\partial x_n} &= 0, \quad x_3 = \pm h/2; \\ \langle u \rangle_{\Omega} &= 0, \end{aligned}$$

где $a_{mn}(\xi)$ — 1-периодические по ξ_1 и ξ_2 бесконечно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям симметрии и эллиптичности, $T_1 \simeq T_2 \simeq 1$, $h \ll \delta \ll \varepsilon$. По переменным x_1 и x_2 на функцию u накладываются также условия T_1 - и T_2 -периодичности соответственно.

Построение формального асимптотического решения. Формальное асимптотическое решение задачи представляется в виде ряда по степеням трех малых величин:

$$u^{(\infty)} \simeq \sum_{p,q,r \geq 0} \varepsilon^p \left(\frac{\delta}{\varepsilon} \right)^q \left(\frac{h}{\delta} \right)^r \sum_{|i|=p} N_i^{q,r}(\xi) D^i v(x_1, x_2),$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (x_1/\varepsilon, x_2/\delta, x_3/h)$.

Функции $N_i^{q,r}(\xi)$ отыскиваются в три этапа, каждый из которых представляет собой решение обыкновенного дифференциального уравнения. В первом имеет место параметрическая зависимость от первой и второй быстрых переменных, во втором — от первой быстрой переменной. В первой из этих трёх ячеечных задач возникают краевые условия, в двух остальных — условия периодичности. Эффективные коэффициенты $\hat{a}_{\alpha\beta}^3$ выражаются непосредственно через коэффициенты $a_{mn}(\xi)$.

Функция $v(x_1, x_2)$ вновь отыскивается в виде ряда по степеням ε , δ/ε и h/ε :

$$v(x_1, x_2) \simeq \sum_{k,l,m \geq 0} \varepsilon^k \left(\frac{\delta}{\varepsilon} \right)^l \left(\frac{h}{\delta} \right)^m v_k^{l,m}(x_1, x_2).$$

Нулевое приближение $v_0^{0,0}(x_1, x_2)$ можно отыскивать, не прибегая к вычислению функций $N_i^{q,r}(\xi)$, соответствующих компонентам асимптотического ряда более высокого порядка.

Обозначим

$$u_{(P)}^{(Q,R)} = \sum_{\substack{p=0,\overline{P}, \\ q=0,\overline{Q}, \\ r=0,\overline{R}}} \varepsilon^p \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^q \left(\frac{h}{\delta}\right)^r \sum_{|i|=p} N_i^{q,r}(\xi) D^i v_{(P)}^{(Q,R)}(x_1, x_2),$$

$$v_{(P)}^{(Q,R)} = \sum_{\substack{k=0,\overline{P}, \\ l=0,\overline{Q}, \\ m=0,\overline{R}}} \varepsilon^k \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^l \left(\frac{h}{\delta}\right)^m v_k^{l,m}(x_1, x_2).$$

Тогда имеет место

Теорема Для разности точного и приближенного решений верны следующие интегральные оценки:

$$\|u - u_{(P)}^{(Q,R)}\|_{L_2(\Omega)} = \underline{O} \left(\varepsilon^{P+1} + \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^{Q+1} + \left(\frac{h}{\delta}\right)^{R+1} \right),$$

$$\|u - u_{(P)}^{(Q,R)}\|_{W_2^1(\Omega)} = \underline{O} \left(\varepsilon^P + \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^Q + \left(\frac{h}{\delta}\right)^R \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При доказательстве были использованы априорные оценки для решения исходной задачи через правые части уравнения и краевого условия.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогичные результаты получены для трёхпериодической среды с периодами неоднородности различной степени малости. В этом случае все три ячейные задачи будут периодическими. В средах, для которых ячейку периодичности характеризуют только два малых параметра, различных по порядку, решение ячейных задач расщепляется не на три одномерные составляющие, а две: одномерную (с параметрической зависимостью от двух других переменных) и частично осреднённую двумерную. Эффективные коэффициенты в этом случае через коэффициенты исходного уравнения явно не выражаются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бажвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М: Наука, 1984
2. Бажвалов Н. С., Эглит М. Э. Методы осреднения и модели колебания тонких пластин // Международная конференция им. И. Г. Петровского "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы". Москва, 17–22 мая 2004.
3. Пшеничников Г. И. Теория тонких упругих сетчатых оболочек и пластинок. М: Наука, 1982
4. Резцов М. В. Осреднение системы уравнений теории упругости в тонком слое толщины h с периодом неоднородностей ε // ЖВМ и МФ. 1989. Т. 29, № 9. С. 1413–1414.
5. Дубинская В. Ю. Осреднение стационарной задачи теплопроводности в тонкой неоднородной пластине // ЖВМ и МФ. 1990. Т. 30, № 4. С. 632–634.
6. Дубинская В. Ю. Асимптотическое разложение решения стационарной задачи теплопроводности в среде с двумя малыми параметрами // Труды Московского математического общества. 2001. Т. 62. С. 105–135.