

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНО-НАГРУЖЕННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

© М. Т. Дженалиев, М. И. Рамазанов

dzhenali@math.kz, ramamur@mail.ru

Институт математики ЦФМИ МОН РК, Алматы, Казахстан

Введение. Нагруженные уравнения, являясь функционально-дифференциальными уравнениями, возникают во многих приложениях и выступают предметом активных научных исследований [1–3]. В докладе рассматриваются граничные задачи для нагруженного параболического уравнения. Особенностью изучаемого уравнения является тот факт, что порядок производной нагруженного слагаемого совпадает с порядком дифференциальной части уравнения, так что нагрузка не является слабым возмущением. Спектральный параметр является коэффициентом нагрузки. Описаны множества значений спектрального параметра, для которых граничная задача оказывается нетривиальной.

Постановки задач. Пусть $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Рассмотрим в области $Q = \{x \in \mathbb{R}_+, t \in \mathbb{R}_+\}$ следующие граничные задачи:

$$Lu + \lambda u_{xx}(x, t)|_{x=t} = f, \quad (1)$$

$$L^*v + \bar{\lambda}\delta''(x-t) \otimes \int_0^\infty v(\xi, t) d\xi = g, \quad (2)$$

и спектральные задачи:

$$Lu = -\lambda u_{xx}(x, t)|_{x=t} \iff \begin{cases} u_t - u_{xx} = -\lambda u_{xx}(x, t)|_{x=t}, \\ u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

$$L^*v = -\bar{\lambda}\delta''(x-t) \otimes \int_0^\infty v(\xi, t) d\xi \iff \begin{cases} -v_t - v_{xx} = -\bar{\lambda}\delta''(x-t) \otimes \int_0^\infty v(\xi, t) d\xi, \\ v(x, \infty) = 0, \quad v(0, t) = v(\infty, t) = v_x(\infty, t) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где

$$\lambda \in \mathbb{C} \text{ — спектральный параметр, } \sqrt{t}f \in M(Q), \quad (x + \sqrt{t})g \in L_1(Q), \quad (5)$$

заданные функции, $M(Q) = L_\infty(Q) \cap C(Q)$, $M(\mathbb{R}_+) = L_\infty(\mathbb{R}_+) \cap C(\mathbb{R}_+)$, функция Грина $G(x, \xi, t - \tau)$ для оператора L .

Определим функциональные классы $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ для решений соответственно граничных задач (1) и (2), а также области определения $\mathcal{D}(L)$ и $\mathcal{D}(L^*)$ операторов L и L^* соответственно следующим образом:

$$\mathcal{U} = \{u \mid (x + \sqrt{t})^{-1}u, \sqrt{t}(u_t - u_{xx}) \in M(Q), \sqrt{t}u_{xx}(x, t)|_{x=t} \in M(\mathbb{R}_+)\}, \quad (6)$$

$$\mathcal{V} = \left\{v \mid t^{-1/2}v, (x + \sqrt{t})(v_t + v_{xx}) \in L_1(Q), t^{-1/2} \int_0^\infty v(\xi, t) d\xi \in L_1(\mathbb{R}_+)\right\}, \quad (7)$$

$$\mathcal{D}(L) = \{u \mid u \in \mathcal{U}, u(x, 0) = 0, u(0, t) = 0\}, \quad (8)$$

$$\mathcal{D}(L^*) = \{v \mid v \in \mathcal{V}, v(x, \infty) = 0, v(0, t) = 0, v(\infty, t) = 0, v_x(\infty, t) = 0\}. \quad (9)$$

ЗАДАЧА 1. Требуется исследовать вопросы разрешимости граничных задач (1) и (2) при условиях (5)–(9).

ЗАДАЧА 2. Требуется исследовать спектральные задачи (3) и (4) по определению пар $\{\lambda, u_\lambda(x, t)\}$ и $\{\lambda, v_\lambda(x, t)\}$ при условиях (6)–(9).

Основные результаты. Исследование граничных задач (1) и (2) сводится к изучению вопросов разрешимости пары сопряженных интегральных уравнений:

$$\mu(t) - \lambda \int_0^t \mathcal{K}_2(t, \tau) \mu(\tau) d\tau = f_1(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (10)$$

$$\nu(t) - \lambda \int_t^\infty \mathcal{K}_2(\tau, t) \nu(\tau) d\tau = g_1(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (11)$$

где $f_1(t)$ и $g_1(t)$ определяются с помощью заданных функций $f(x, t)$ и $g(x, t)$ соответственно, и

$$\mathcal{K}_2(t, \tau) = \frac{t^{3/2}}{2\sqrt{\pi\tau}(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{t^2}{4(t-\tau)}\right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Для ядра $\mathcal{K}_2(t, \tau)$ имеет место следующее предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_0^t \mathcal{K}_2(t, \tau) d\tau = \lim_{t \rightarrow +0} \exp\left(\frac{-t}{4}\right) = 1.$$

Из этого предельного соотношения следует, что норма интегрального оператора, действующего в пространстве ограниченных и непрерывных функций и определяемого ядром $\mathcal{K}_2(t, \tau)$, равна единице (хотя ядро $\mathcal{K}_2(t, \tau)$ имеет интегрируемую особенность). Это принципиальным образом отличает уравнение (10) от уравнений Вольтерры второго рода, для которых, как известно, решение существует и единственно. В нашем случае решение соответствующего однородного уравнения

$$\mu(t) - \lambda \int_0^t \mathcal{K}_2(t, \tau) \mu(\tau) d\tau = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

для некоторых значений $\lambda \in \mathbb{C}$ может быть и нетривиальным. Это показано в нижеследующих утверждениях.

Теорема 1. Граничная задача (1) в классе (8) является нетеровой с неотрицательным индексом, определяемым значением модуля спектрального параметра λ .

Теорема 2. На комплексной плоскости у оператора L^* (4) нет собственных значений.

Аналогичное утверждение установлено в спектральной задаче для оператора L^* (3) в классе (9).

Доказательства теорем 1 и 2 основаны на применении метода регуляризации решением характеристических уравнений [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19, № 1. С. 86–94.
2. Кожанов А. И. Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и о связанной с ним обратной задаче // Математические заметки. 2004. Т. 76, вып. 6. С. 840–853.
3. Джениалиев М. Т., Рамазанов М. И. О граничной задаче для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности // Сибирский математический журнал. 2006. Т. 47, № 3. С. 527–547.