

УДК 517.95

О СПЕКТРАЛЬНО-НАГРУЖЕННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ
УРАВНЕНИЯХ В ОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

© М. Т. Дженалиев*, М. И. Рамазанов*, Б. С. Кошкарлова**

dzhenali@math.kz, ramamur@mail.ru, b_koshkarova@mail.ru

* Институт математики ЦФМИ МОН РК, Алматы, Казахстан;

** Карагандинский государственный университет им. Е. А. Букетова, Караганда, Казахстан

Постановка задачи. В области $Q = \{x, t | x \in \Omega, \Omega \subset R^n, 0 < t < 2\pi\}$ изучаются вопросы разрешимости граничной задачи для спектрально-нагруженного параболического уравнения [1–3]

$$\mathbb{L}_5 u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u(x, t) + \int_{\Gamma_1} \alpha(x, \xi') \frac{\partial^k u(\bar{x}_1, \xi', t)}{\partial x_1^k} d\xi' = f \quad \text{в } Q; \quad (1)$$

$$u(x, t) = 0 \quad \text{в } \Sigma = \{x, t | x \in \partial\Omega, t \in (0, 2\pi)\}, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u(x, 2\pi), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

где $\partial\Omega$ — граница области Ω , $x' = \{x_2, \dots, x_n\}$, $\xi' = \{\xi_2, \dots, \xi_n\}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_1 - \text{сечение области } \Omega \text{ при фиксированном } x_1 = \bar{x}_1, \\ \alpha \in L_2(\Gamma_1; W_2^{2m}(\Omega)), f \in L_2(0, 2\pi; W_2^{2m}(\Omega)) - \text{заданные функции,} \\ k \geq 2, \quad m = \begin{cases} k/2, & \text{если } k - \text{четное число,} \\ (k-1)/2, & \text{если } k - \text{нечетное число.} \end{cases} \end{array} \right.$$

Основной результат. Имеет место

Теорема. Пусть $n \geq 3$, Ω — единичный шар с центром в начале координат. В этом случае для любых $f \in L_2(0, 2\pi; W_2^{2m}(0, 1))$, $\alpha \in \mathbb{C}$ граничная задача (1)–(3) имеет единственное сильное решение $u(x, t)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \cdot \text{meas}\{\Gamma_1\} \neq n, \quad \text{если } k = 2, \\ \text{для любых } \alpha, \quad \text{если } k \geq 3; \\ \delta_s \neq 0, \quad \forall s \in S, \quad S = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{array} \right.$$

где используются обозначения:

$$\delta_s = 1 + \alpha \cdot \int_{\Gamma_1} \frac{\partial^k \beta_s(\bar{x}_1, x')}{\partial x_1^k} dx' \neq 0, \quad \forall s \in S,$$

$$\beta_s(r) = \int_0^1 G_s(r, \rho) d\rho, \quad \forall s \in S. \quad (4)$$

В соотношении (4) $G_s(r, \rho)$ — обобщенная функция Грина эллиптической части оператора задачи (1)–(3)

$$G_s(r, \rho) = \begin{cases} \frac{\rho^{\nu+1}}{r^\nu} \cdot \frac{[I_\nu(\lambda)K_\nu(\lambda r) - I_\nu(\lambda r)K_\nu(\lambda)] \cdot I_\nu(\lambda \rho)}{I_\nu(\lambda)}, & 0 \leq \rho \leq r, \\ \frac{\rho^{\nu+1}}{r^\nu} \cdot \frac{[I_\nu(\lambda)K_\nu(\lambda \rho) - I_\nu(\lambda \rho)K_\nu(\lambda)] \cdot I_\nu(\lambda r)}{I_\nu(\lambda)}, & r \leq \rho \leq 1, \end{cases}$$

здесь $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ — модифицированные функции Бесселя, $\nu = n/2 - 1$.

Для изучения задачи (1)–(3) в области Q рассматривается следующая вспомогательная нелокальная задача:

$$\mathbb{L}_6 u \equiv (-1)^m \Delta^m v(x, t) = F(x, t), \quad \{x, t\} \in Q, \quad (5)$$

$$u(x, t) = 0, \quad \frac{\partial^j v(x, t)}{\partial \vec{n}^j} = G_j(x, t), \quad \{x, t\} \in \Sigma, \quad j = \overline{0, m-1}, \quad (6)$$

$$u(x, 0) = u(x, 2\pi), \quad x \in (0, 1), \quad (7)$$

где $\vec{n}$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$,

$$F(x, t) \equiv (-1)^m \Delta^m f(x, t), \quad G_j(x, t) \equiv \frac{\partial^j f(x, t)}{\partial \vec{n}^j}, \quad j = \overline{0, m-1},$$

$$v(x, t) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u(x, t) + \int_{\Gamma_1} \alpha(x, \xi') \frac{\partial^k u(\bar{x}_1, \xi', t)}{\partial x_1^k} d\xi', \quad \{x, t\} \in Q.$$

Граничные задачи (1)–(3) и (5)–(7) взаимосвязаны. Действительно, регулярное решение задачи (5)–(7) будет таковым и для задачи (1)–(3). Обратно, если регулярное решение задачи (1)–(3) обладает производными требуемого порядка, то оно будет регулярным решением и задачи (5)–(7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джсналиев М. Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы, 1995.
2. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М., 1995.
3. Джсналиев М. Т., Рамазанов М. И. О граничных задачах для “существенно” нагруженных параболических уравнений в ограниченных областях. I (одномерный случай) // Докл. АМАН (Нальчик). 2004. Т. 7, № 1. С. 32–36.